



# VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas

21, 22 e 23 de  
maio de 2014  
RIO DE JANEIRO

Realização:



COMEMORANDO 40 ANOS DA PONTE RIO NITEROI

## Dimensionamento de Regiões D Através do Método dos Elementos Finitos e o Método de Bielas e Tirantes

Henrique Towata Sato<sup>1</sup>, Paulo de Mattos Pimenta<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, htshd@usp.br

<sup>2</sup> Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, ppimenta@usp.br

### Resumo

O dimensionamento de Regiões D (regiões em que não é aplicável a hipótese de Bernoulli), embora amplamente estudado e discutido, é um tópico ainda em desenvolvimento. Dentre os métodos utilizados para o dimensionamento destas regiões, os mais difundidos são o Método dos Elementos Finitos e o Método de Bielas e Tirantes. O MEF ainda não possui normatização brasileira específica para sua utilização, sendo vetado como método para o dimensionamento segundo a proposta de revisão da norma NBR6118:2013, entretanto não é incomum seu uso como método de verificação, e mesmo dimensionamento em recomendações internacionais. O artigo propõe uma metodologia para a aplicação do MEF no dimensionamento destas regiões. Analogamente o artigo propõe uma metodologia para a aplicação do MBT utilizando a otimização topológica como forma de geração automática de modelos. As metodologias são aplicadas a exemplos práticos de Regiões D com recomendações normativas específicas para seu dimensionamento (consolo e viga parede bi-apoiada) e também a uma viga parede de geometria complexa, os resultados através de diferentes técnicas de dimensionamento são comparados e discutidos.

### Palavras-chave

Concreto armado; descontinuidades; Método dos Elementos Finitos; Método de Bielas e Tirantes.



# VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas

21, 22 e 23 de  
maio de 2014  
RIO DE JANEIRO

COMEMORANDO 40 ANOS DA PONTE RIO NITEROI

Realização:



## 1. Introdução

A teoria clássica do concreto armado baseia-se em algumas hipóteses simplificadoras, dentre elas, no caso de elementos lineares, a hipótese de Bernoulli. Tal hipótese é a suposição de que o perfil de deformações em uma seção transversal é linear, sendo desprezível o efeito da deformação devida aos esforços cortantes.

Está hipótese pode ser considerada válida de forma geral para elementos lineares distantes dos nós e de pontos de mudança de regime de aplicação de cargas, sendo estas regiões denominadas Regiões B. Por outro lado regiões que apresentam um comportamento bi ou tridimensional não atendem à hipótese de Bernoulli, a estas regiões dá-se o nome de Regiões D. Estas regiões podem caracterizar elementos que intrinsecamente não possuem um perfil de deformações lineares (como blocos de coroamento, transversinas, vigas-parede e consolos), bem como elementos lineares próximos a perturbações geométricas (mudanças de seção, aberturas ou nós de pórticos) ou perturbações estáticas (como aplicação de cargas concentradas).

Para o dimensionamento de Regiões D existem algumas alternativas como modelos padronizados, existentes para situações de maior repetição como é o caso de consolos e blocos de coroamento; o Método de Bielas e Tirantes (MBT) proposto por Ritter e Mörsch no início do século XX e o Método dos Elementos Finitos (MEF), em que a região é analisada através de um modelo bi ou tridimensional. O presente artigo propõe aplicações das metodologias para o dimensionamento exclusivamente ao Estado Limite Último (ELU).

## 2. Disposições normativas (NBR6118:2013)

A proposta de revisão de norma NBR6118:2013 estabelece no item 14.2.3 que a aplicação da análise linear em projeto somente pode se dar em duas situações:

- Como base para a determinação das trajetórias de tensão para a definição de um modelo MBT;
- Para a determinação de esforços solicitantes através da integração do campo de tensões, sendo que o dimensionamento deve se dar pela Teoria do Concreto Estrutural.

Por outro lado é expressamente proibido o dimensionamento das armaduras a partir diretamente dos esforços ou das tensões resultantes desta análise, como é proposto neste artigo.



# VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas

21, 22 e 23 de maio de 2014  
RIO DE JANEIRO

COMEMORANDO 40 ANOS DA PONTE RIO NITEROI

Realização:



Sobre a análise não linear, o projeto de revisão da norma estabelece que seus resultados poderão ser utilizados para avaliar o desempenho da estrutura em serviço ou na ruptura, entretanto, não devem ser usados para a determinação das armaduras finais dos elementos estruturais.

Sobre o MBT o projeto de revisão da norma estabelece no item 22.3 que os modelos devam ser exclusivamente isostáticos e autoequilibrados, sendo as reações de apoio obtidas a partir de um modelo linear ou não linear externo ao do MBT.

Outra limitação imposta à aplicação da teoria é a restrição ao ângulo de inclinação entre bielas inclinadas e a armadura longitudinal do elemento estrutural, sendo a tangente do ângulo limitada aos valores de 0,57 e 2.

### 3. Método dos Elementos Finitos aplicado ao concreto armado

Existem diferentes aplicações do MEF ao concreto armado, e em comparação com outras metodologias sua normatização é relativamente escassa. Recomendações normativas quanto à sua aplicação ao concreto armado são crescentes, assim como ferramentas para o processamento e pós-processamento que adereçam as não linearidades do concreto, a passagem da microestrutura para a macroestrutura e modelos de dano e fissuração.

Na análise de estruturas de concreto e em particular para o dimensionamento de Regiões D existem diferentes abordagens, sendo ponto crucial a definição pela consideração de um modelo linear ou não linear.

Embora o concreto armado seja um material anisótropo, heterogêneo e sujeito a diversos efeitos não lineares tais como fissuração, fluência e retração, a análise linear ainda encontra aplicabilidade. A FIB (2008) recomenda sua utilização por levar a um dimensionamento coerente (as armações se concentrarão nos pontos de maior tração), por absorver múltiplos casos de carregamento com facilidade e por considerá-la uma prática bem estabelecida.

Além disso, a análise linear possui menor quantidade de variáveis a serem calibradas e, de acordo com a teoria da plasticidade, a ruptura plástica se dará com uma carga superior àquela da análise elástico-linear, ou seja, a segurança ao ELU é garantida desde que sejam observadas condições adequadas de utilidade e ancoragem das armaduras.

Entretanto, é imprescindível que uma estrutura dimensionada pela análise linear seja também avaliada através de uma análise não linear já que fatores importantes para o ELS como a



# VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas

21, 22 e 23 de maio de 2014  
RIO DE JANEIRO

COMEMORANDO 40 ANOS DA PONTE RIO NITEROI

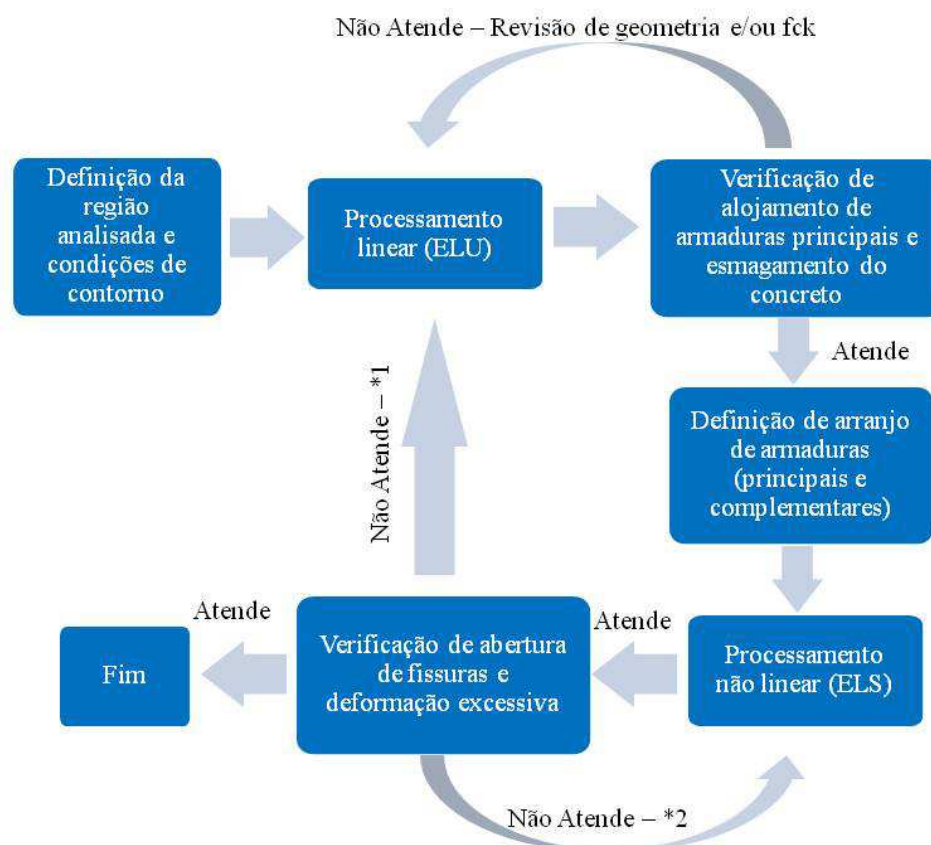
Realização:



fissuração (que além de impactar na própria verificação de abertura de fissuras afeta também a deformação) só podem ser avaliados através desta segunda análise.

O procedimento proposto para o dimensionamento através do MEF então se assemelharia à verificação sob não linearidade de peças através da própria teoria do concreto armado. A figura 1 resume este procedimento onde:

- \*1 se refere à fissuração excessiva na região da armadura principal, neste caso deve ser alterada a geometria da peça. No caso de deformação excessiva, de forma geral, deve ser revista a geometria de peça.
- \*2 se refere à fissuração excessiva devido a cisalhamento ou fendilhamento por compressão, neste caso devem ser revistas as armações limitantes de fissuração.

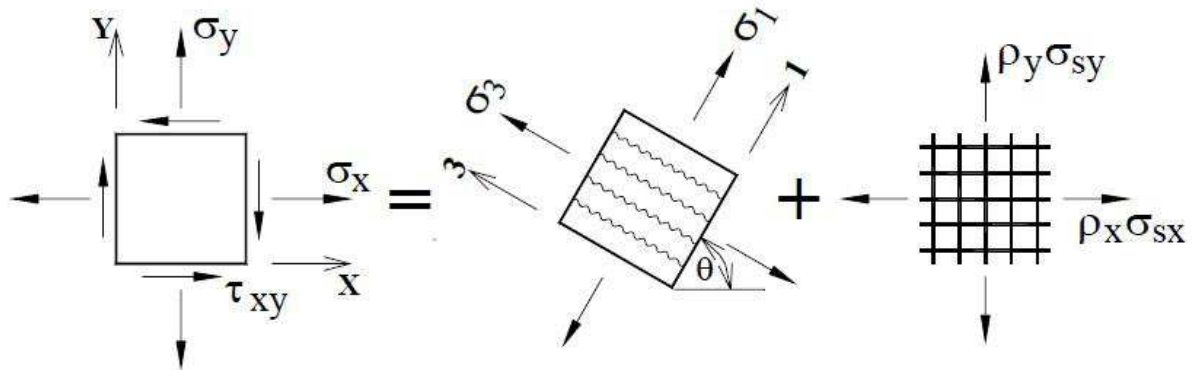


**Figura 1 – Fluxograma de Dimensionamento de Regiões D**

Especificamente para o dimensionamento de Regiões D a teoria mais comumente aplicada é a do “campo de compressão” (em inglês *compression field*), o dimensionamento pode ser realizado para cada elemento através da análise das tensões atuantes sobre ele. Neste



dimensionamento toda tração é considerada como absorvida pelas armaduras dispostas nas direções x e y e a compressão é resistida pelo concreto, conforme ilustrado pela figura 2.



**Figura 2 – Tensões consideradas.**

Para o dimensionamento tomou-se como base o conjunto de equações proposto por Kaufmann & Marti (1998) que engloba o caso mais geral de dimensionamento, em que as armaduras podem contribuir também para a resistência à compressão:

$$Y1 = \tau_{xy}^2 - (\rho_x f_{ytd,x} - \sigma_x)(\rho_y f_{ytd,y} - \sigma_y) = 0 \quad (1)$$

$$Y2 = \tau_{xy}^2 - (f_{cd} - \rho_x f_{ytd,x} + \sigma_x)(\rho_x f_{ytd,x} - \sigma_x) = 0 \quad (2)$$

$$Y3 = \tau_{xy}^2 - (f_{cd} - \rho_y f_{ytd,y} + \sigma_y)(\rho_y f_{ytd,y} - \sigma_y) = 0 \quad (3)$$

$$Y4 = \tau_{xy}^2 - f_{cd}/4 = 0 \quad (4)$$

$$Y5 = \tau_{xy}^2 + (f_{cd} + \rho_x f_{ycd,x} + \sigma_x)(\rho_x f_{ycd,x} + \sigma_x) = 0 \quad (5)$$

$$Y6 = \tau_{xy}^2 + (f_{cd} + \rho_y f_{ycd,y} + \sigma_y)(\rho_y f_{ycd,y} + \sigma_y) = 0 \quad (6)$$

$$Y7 = \tau_{xy}^2 - (f_{cd} + \rho_x f_{ycd,x} + \sigma_x)(f_{cd} + \rho_y f_{ycd,y} + \sigma_y) = 0 \quad (7)$$

A equação (1) corresponde ao escoamento das armaduras nas direções X e Y antes do esmagamento do concreto, representando o comportamento de peças subarmadas. As equações (2) e (3) correspondem ao esmagamento do concreto em conjunto com o desenvolvimento do escoamento da armadura nas direções X ou Y respectivamente. A equação (4) representa o esmagamento do concreto sem o desenvolvimento do escoamento do aço. As equações (5), (6) e (7) dizem respeito a elementos comprimidos nas duas direções.





# VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas

21, 22 e 23 de maio de 2014  
RIO DE JANEIRO

COMEMORANDO 40 ANOS DA PONTE RIO NITEROI

Realização:



Quando for possível resistir aos esforços de compressão sem a necessidade de armadura tem-se um dimensionamento mais econômico.

## 4. Método de Bielas e Tirantes

O MBT consiste em uma analogia do comportamento do concreto armado com o de uma treliça, proposto inicialmente por Ritter e Morsch. Suas bases teóricas consolidadas com os estudos de Schlaich et al (1987) e Schlaich & Schäfer (1991) e validado posteriormente por estudos experimentais.

Por ser uma solução apenas estaticamente admissível, isto é, por não atender à compatibilidade de deformações, o MBT possui infinitas soluções que, embora sejam seguras do ponto de vista teórico pelo Teorema do Limite Inferior, não são necessariamente aplicáveis ao concreto armado.

Devido aos limites de utilidade e redistribuição de esforços na estrutura de concreto armado alguns modelos adotados para o MBT podem considerar uma carga última superestimada. Tendo em vista este fato, os modelos mais adequados são aqueles que melhor representam o perfil de deformações e tensões na estrutura analisada e conseqüentemente demandam menor redistribuição de cargas e menor energia de deformação.

Para a determinação do modelo existem diferentes metodologias como o método do caminho de cargas, pré-processamento através do MEF, análise do padrão de fissuração e métodos de otimização. Em busca de menor subjetividade na definição da treliça resistente, o presente trabalho propõe a utilização da otimização topológica como método de definição do modelo.

A otimização topológica utilizada no estudo considera o domínio analisado discretizado em uma malha de elementos finitos em que se varia a densidade de cada um destes elementos. Este processo de otimização busca maximizar a rigidez (ou minimizar a flexibilidade) da estrutura mantendo-se um volume máximo de material, que embora não corresponda de fato ao caso estudado, já que a princípio todo o volume será preenchido por concreto, leva a estruturas semelhantes às treliças MBT.

Este tipo de otimização pode ser encontrada já implementada em pacotes de elementos finitos ou pode ser facilmente utilizada já que seu código é relativamente simples e divulgado abertamente nos trabalhos de SIGMUND *et al* (2001 e 2011).



# VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas

21, 22 e 23 de maio de 2014  
RIO DE JANEIRO

COMEMORANDO 40 ANOS DA PONTE RIO NITEROI

Realização:



Embora a princípio a análise e definição da estrutura otimizada seja feita de forma adimensional, é possível utilizar o próprio modelo para a definição das reações de apoio obtendo-se todos os dados iniciais necessários para o dimensionamento através do MBT.

Assim como a análise linear por elementos finitos, o desempenho no estado limite de serviço deve ser avaliado por outro método que considere efeitos não lineares. Desta forma o fluxograma para a análise é idêntico ao exposto na figura 1.

## 5. Exemplos e comparativo

Buscando comparar as metodologias sugeridas com a prática usual e as recomendações normativas atuais foram dimensionadas Regiões D com sistemática ou recomendações específicas para seu dimensionamento, a exceção é o terceiro exemplo, utilizado para comparar especificamente o MEF com o MBT em uma geometria não usual.

Como hipótese simplificadora foi adotada na modelagem a condição de estado plano de tensões com a largura do elemento estudado. Em todos os exemplos a malha de elementos finitos utilizada é composta por elementos quadrilaterais de 8 nós.

No primeiro exemplo a dimensão típica dos elementos é de 5cm, no segundo de 10cm e no terceiro de 20cm, definidos à partir de uma análise de sensibilidade com relação à discretização da malha. Entretanto deve-se notar que há pouca variação mesmo com malhas menos refinadas.

### 5.1 Consolo

O consolo adotado para o estudo comparativo tem dimensões:  $b=50\text{cm}$ ,  $a=25\text{cm}$ ,  $d=45\text{cm}$ , desta forma, está dentro dos limites estabelecidos para a aplicação do MBT ( $\tan \theta = 0,56$ ). Sujeito a um esforço vertical de 600kN e esforço horizontal de 96kN. Com os parâmetros  $f_{ck}=50\text{MPa}$  e  $f_{yk}= 500\text{MPa}$ .

**Tabela 1 – Comparativo Consolo.**

		NBR9062	MEF		MBT	
			Resultado	Diferença	Resultado	Diferença
As Tirante	cm <sup>2</sup>	11,25	12,18	8%	9,87	-12%
Tensão Limite na Biela	Mpa	35,71	35,71	0%	20,57	-42%
Tensão observada na Biela	Mpa	4,58	30,71	571%	4,58	0%
As transversal	cm <sup>2</sup> /m	8,04	2,35	-71%	-	-
As costura	cm <sup>2</sup> /m	8,14	13,83	70%	-	-



O modelo padronizado utilizado é aquele descrito no item 7.3.2 da norma NBR9062/2006, sendo caracterizado como consolo curto.

## 5.2 Viga parede bi-apoiada

A viga parede adotada para o comparativo baseou-se no trabalho desenvolvido por SOUZA (2004), com os parâmetros:  $f_{ck}=25\text{MPa}$ ,  $f_{yk}=500\text{MPa}$ , espessura da viga=50cm e placas de apoio rígidas com dimensões 0,45x0,5m. Devido às aplicações de cargas pontuais, a viga como um todo caracteriza uma Região D.

A NBR6118 sugere a utilização do MBT com recomendações adicionais referentes às disposições das armaduras. Para efeito de comparação, foi considerado também o dimensionamento da viga parede como viga comum, através da teoria do concreto armado.

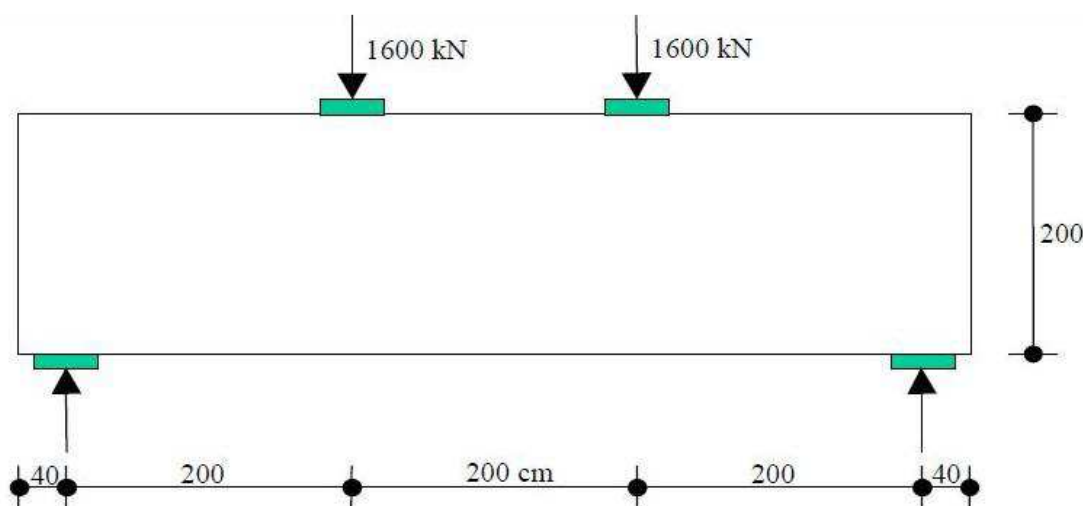


Figura 3 – Viga Parede Bi-Apoiada

Tabela 2 – Comparativo Viga Parede.

		NBR6118/MBT	MEF		Viga (NBR6118)	
			Resultado	Diferença	Resultado	Diferença
As Tirante	cm <sup>2</sup>	46,00	58,24	27%	43,96	-4%
As vertical	cm <sup>2</sup> /m	3,75	0,79	-79%	12,9	-72%
As costelas	cm <sup>2</sup> /m	3,75	20,12	437%	6,15	-87%
Tensão Limite na Biela Inclínada	Mpa	11,57	17,86	54%	-	-
Tensão observada na Biela Inclínada	Mpa	10,24	56,33	450%	-	-
Tensão Limite na Biela Superior	Mpa	13,66	17,86	31%	-	-
Tensão observada na Biela Superior	Mpa	8,00	12,23	53%	-	-





### 5.3 Viga parede com aberturas

Este exemplo de aplicação busca comparar o MEF com o MBT em uma geometria não usual de modo a demonstrar a possibilidade de generalização de ambos os métodos. O exemplo também foi baseado no trabalho de SOUZA (2004) em que é proposto um dimensionamento através do MBT obtido da análise do caminho de cargas.

Para o exemplo são adotados  $f_{ck}=26\text{MPa}$ ,  $f_{yk}=500\text{MPa}$ , espessura da viga=50cm. O carregamento apresentado na figura 4 refere-se ao valor de projeto.

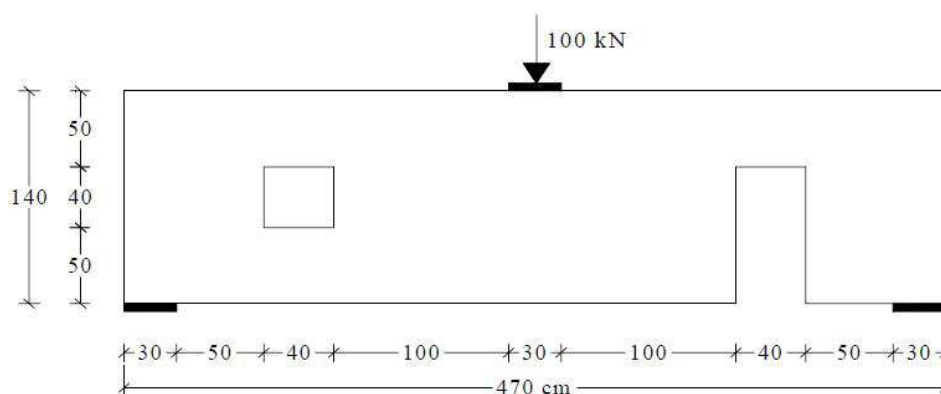


Figura 4 – Viga Parede Bi-Apoiada com aberturas

Na definição do MBT foi empregada otimização topológica chegando ao resultado abaixo:

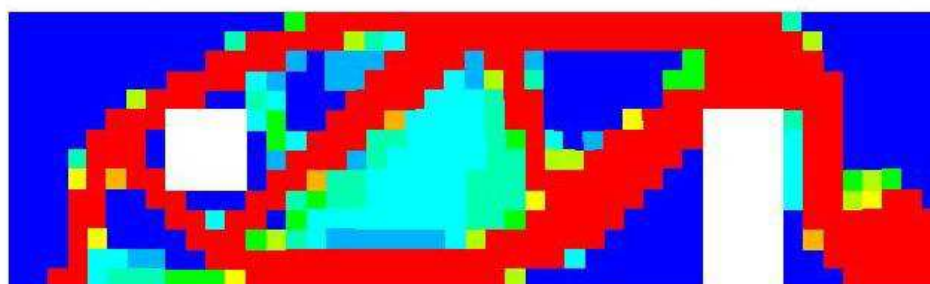


Figura 5 – Otimização topológica da viga parede

A partir do resultado pode observar-se a presença de tirantes inclinados sob o canto inferior esquerdo da abertura esquerda, sobre o canto superior direito da abertura esquerda e atravessando diagonalmente a peça passando sobre o canto superior esquerdo da abertura direita. Além de um tirante horizontal junto à face inferior no trecho central.

Visando um melhor arranjo construtivo os tirantes inclinados foram decompostos em tirantes verticais e horizontais, chegando-se a uma topologia semelhante à de SOUZA (2004) levemente simplificada:

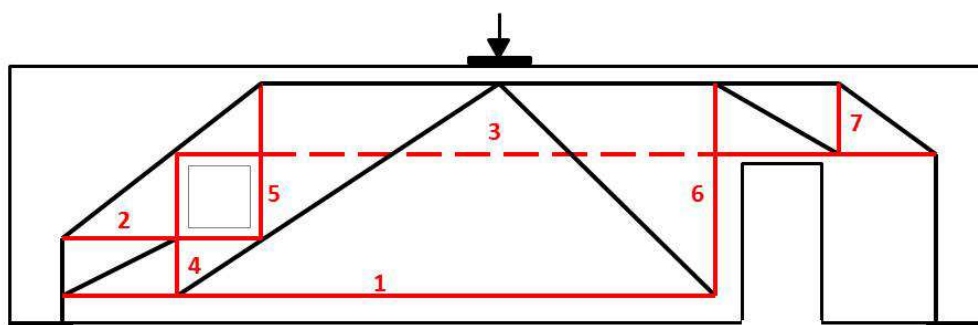


Figura 6 – MBT da viga parede

Para o comparativo foram utilizadas as áreas de aço obtidas nos tirantes e seus equivalentes obtidos no dimensionamento direto via MEF.

Tabela 3 – Comparativo Viga Parede com Aberturas.

	cm <sup>2</sup>	MBT	MEF	
			Resultado	Diferença
(1) Face inferior da viga	cm <sup>2</sup>	1,67	4,45	166%
(2) Abaixo da abertura esquerda	cm <sup>2</sup>	0,99	0,56	-43%
(3) Acima das aberturas	cm <sup>2</sup>	3,48	8,81	153%
(4) À esquerda da abertura esquerda	cm <sup>2</sup>	0,40	0,28	-30%
(5) À direita da abertura esquerda	cm <sup>2</sup>	0,75	0,44	-42%
(6) À esquerda da abertura direita	cm <sup>2</sup>	1,75	8,42	380%
(7) À direita da abertura direita	cm <sup>2</sup>	1,15	0,52	-54%

## 6. Conclusões

Existe variação significativa do dimensionamento através do MEF em relação à teoria do concreto armado, de maneira geral as tensões observadas através da modelagem linear em elementos finitos são significativamente superiores às aquelas observadas através de modelos de bielas e tirantes ou a teoria do concreto armado.

Este resultado é esperado uma vez que, ao discretizar-se uma estrutura para a aplicação de um método numérico, parte da eficiência estrutural é perdida pela limitação dos pontos analisados. Por exemplo, no dimensionamento de uma seção à flexão, o braço de alavanca passa a apresentar variações discretas em oposição à variação contínua no dimensionamento analítico. Neste sentido, o dimensionamento pela integração de esforços em uma determinada seção conforme sugerido pela norma proporcionaria economia de armadura. Outro ponto ainda mais relevante é a consideração de modelo elástico linear, ao não considerar-se redistribuição de tensões através do escoamento do aço e da fissuração do concreto a tensão é superior à esperada na estrutura real.



# VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas

21,22 e 23 de maio de 2014  
RIO DE JANEIRO

COMEMORANDO 40 ANOS DA PONTE RIO NITEROI

Realização:



Sobre as armaduras em que o dimensionamento através do MEF resultou inferior, nos dois primeiros exemplos, elas seriam iguais ao dimensionamento por norma, uma vez que correspondem a armaduras mínimas. No terceiro exemplo as reduções observadas nas armaduras dos tirantes (2), (4), (5) e (7) se devem ao fato de no Modelo de Bielas e Tirantes terem seu dimensionamento regido por nós do tipo CCT (encontro de 2 bielas e 1 tirante equilibrando o desvio dos esforços de compressão). Enquanto no MBT a mudança de direção dos esforços de compressão se dá de forma abrupta no nó, no MEF a mudança se dá de forma gradual ao longo dos elementos.

O MEF é uma importante alternativa de dimensionamento para Regiões D principalmente por sua versatilidade, mesmo apresentando diferenças significativas com relação a outros métodos de dimensionamento sua aplicação pode ser considerada segura se aliada a outras disposições, em especial referentes a ancoragens e taxas mínimas de armaduras. Neste sentido o engenheiro estrutural deve favorecer em ordem: o dimensionamento de estruturas através da teoria do concreto armado (caso ela seja aplicável); através de modelos padronizados (caso existam); através do MBT e se o comportamento da estrutura analisada não possa ser bem representado pelos anteriores através do MEF.

## 7. Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. 1º Projeto de Revisão ABNT NBR6118 – Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento, 2013.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR9062 – Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Pré-Moldado, 2013.
- FIB. Practitioners' guide to finite element modelling of reinforced concrete structures. Bulletin 45, 2008.
- KAUFMANN, W., MARTI, P. Structural Concrete: Cracked Membrane Model. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 124, No. 12, p.1467-1475, 1998.
- SCHLAICH, J; SCHÄFER, K; JENNEWEIN, M. Toward a consistent design of structural concrete. PCI J PCI 32(3): p.75-150, 1987.
- SCHLAICH, J; SCHÄFER, K. Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models. Struct Eng 69(6): p.113-125, 1991.
- SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. Struct Multidisc Optim 21, p.120-127, 2001.
- SIGMUND, O. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines pf code. Struct Multidisc Optim 43, p.01-16, 2011.
- SOUZA, R. Concreto estrutural: Análise e dimensionamento de elementos de elementos com descontinuidades. Tese de doutorado. 2004.