



ANÁLISE COMPARATIVA DA DISTRIBUIÇÃO DE CARGA EM PONTES HIPERESTÁTICAS DE CONCRETO ARMADO COM MÚLTIPLAS LONGARINAS POR MEIO DE MODELOS ANALÍTICOS CLÁSSICOS E DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

**Tércio Pereira Jovem¹, Arthur da Silva Rebouças², José Neres da Silva Filho³,
Hidelbrando José Farkat Diógenes⁴ & Rodrigo Carvalho da Mata⁵**

^{1,2&3}Universidade Federal do Rio Grande do Norte/Programa de Pós-Graduação em Eng. Civil-PEC-UFRN/
(terciopereira_eng.civil@hotmail.com; arthursr@gmail.com; jneres@ect.ufrn.br;))

⁴Universidade Federal da Paraíba/Departamento de Eng. Civil e Ambiental - FUFPPB - hidelbrando@ct.ufpb.br

⁵Pontifícia Universidade Católica de Goiás – PUC-GO – rodrigo.c@pucgoias.edu.br

Resumo

As pontes são elementos essenciais para os sistemas rodoviário e ferroviário de transporte, em especial no Brasil onde estes modais são muito relevantes. Nesse contexto, se insere o sistema estrutural de pontes com longarinas principais múltiplas que ocupa lugar de destaque no mundo, por ser relativamente simples e eficiente, com vantagens econômicas e construtivas notadamente conhecidas. O presente trabalho teve como objetivo analisar um modelo de ponte hiperestática com seção transversal com três e cinco longarinas principais, considerando a superestrutura isolada da mesoestrutura e da infraestrutura, comparando os resultados obtidos através dos Métodos Analíticos Clássicos com os de análise computacional via Método dos Elementos Finitos (MEF).

Palavras-chave

Distribuição de carga em tabuleiros; Métodos analíticos de repartição de cargas; MEF.

Introdução

As pontes são elementos essenciais para os sistemas rodoviário e ferroviário de transporte, em especial no Brasil onde estes modais são muito relevantes. Segundo o relatório do Plano Nacional de Logística e Transporte (PNLT, 2011), baseado em dados georreferenciados pela Agência Nacional de Transporte Terrestre (ANTT), na distribuição modal da matriz brasileira de transportes regionais de carga predominam os modais rodoviário, em torno de 52 % e o ferroviário em torno de 30%, em quantidades de toneladas-quilômetro-úteis (TKUs) em relação aos outros modais. Neste sentido, projetos e execuções de estruturas deste tipo são de grande importância para o desenvolvimento econômico do Brasil.

Apesar disso, poucos são os estudos que objetivam otimização da distribuição de cargas em tabuleiros de pontes que levam em conta a rigidez à flexão das longarinas; a rigidez à flexão das transversinas e o seu impacto para a rigidez à torção e flexão da grelha resultante da associação das longarinas e transversinas. Assim, o presente trabalho teve como objetivo analisar um modelo de ponte hiperestática com seção transversal com três e cinco longarinas principais, considerando a superestrutura isolada da mesoestrutura e da infraestrutura para avaliar a repartição de carga nas longarinas principais através de modelos analíticos

consagrados e de modelos computacionais utilizando o Método dos Elementos Finitos através de um software comercial.

Para tanto, o modelo foi avaliado pelos métodos analíticos de repartição transversal de cargas de Engesser-Courbon, Leonhardt e Guyon-Massonet, e comparado com modelos em elementos finitos. Os métodos analíticos apresentaram limitações em relação à consideração da rigidez à torção ou, em alguns casos, até mesmo desprezou-se tal comportamento, pois não representavam, com fidedignidade, o comportamento estrutural da superestrutura. Os modelos em elementos finitos apresentaram o melhor comportamento da ponte, visto que permitiu considerar o funcionamento conjunto da estrutura.

Ponte Modelo

A ponte utilizada para fins de análise, encontra-se detalhada nas figuras a seguir, com as dimensões em centímetro:

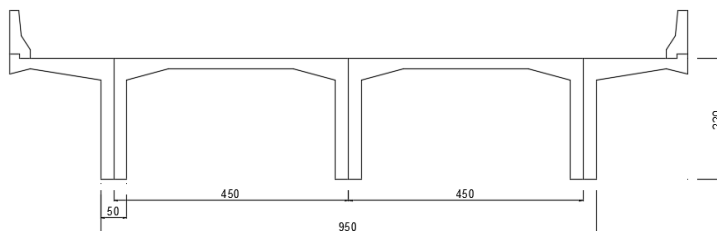


Figura 1 - Seção Transversal da Ponte com três longarinas.

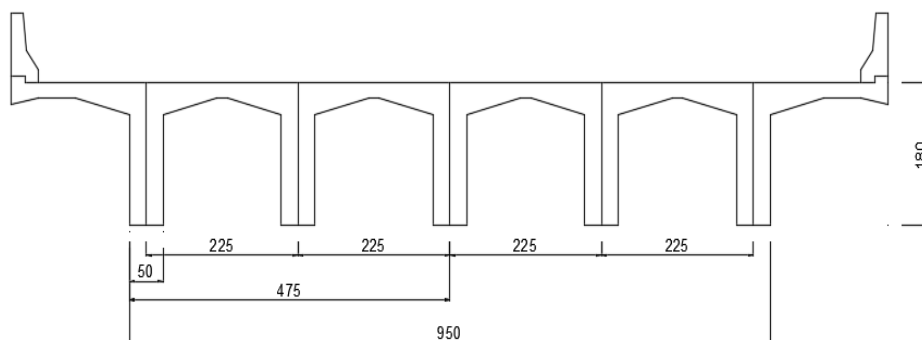


Figura 2 - Seção Transversal da Ponte com cinco longarinas.

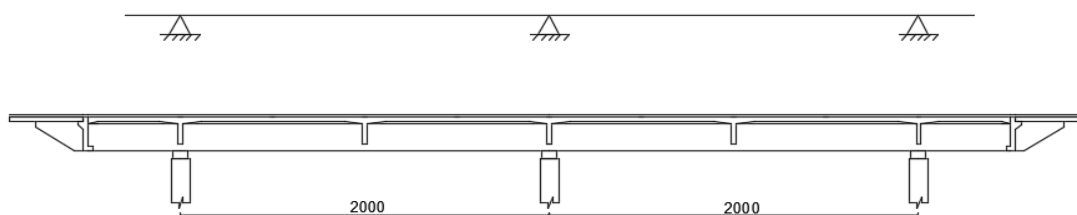


Figura 3 - Esquema Longitudinal.

Métodos Analíticos:

Método de Engesser-Courbon

O método de *Engesser-Courbon* foi desenvolvido na década de 40 e admitiu-se que a transversina possuía rigidez infinita com suas deformações em relação as deformações das longarinas sendo desprezadas. Isso fez com que o comportamento mecânico do conjunto à flexão transversal, na região das transversinas, ficasse semelhante ao de uma viga deslocando como corpo rígido sob apoios elásticos. De acordo com COURBON apud SAN MARTIN (1981), essa simplificação foi feita porque as deformações elásticas das transversinas, devido a limitação da largura do tabuleiro, seriam muito pequenas quando comparadas às das longarinas (figura 4).

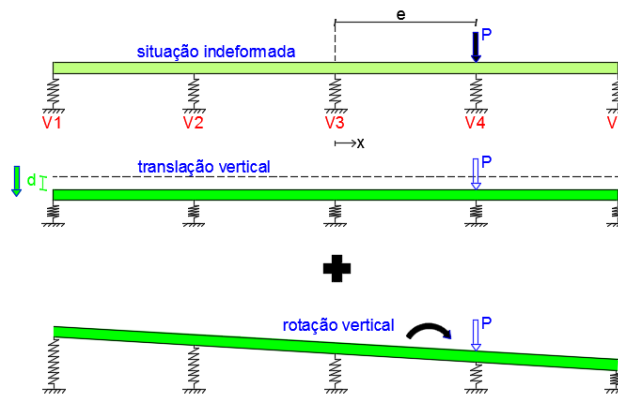


Figura 4 – deslocamento de corpo rígido da transversina.

Considerando essa simplificação, observa-se que o efeito de torção entre as vigas também foi desprezado, ou seja a rigidez a torção e o monolitismo do tabuleiro não foram considerados com o intuito de tornar o processo menos laborioso, tendo em vista as dificuldades da época. Dessa forma, não há reação de torção entre as vigas. Portanto, com base nas hipóteses supracitadas e admitindo que as longarinas tem a mesma seção transversal e, portanto, possuem a mesma rigidez a flexão, COURBON apud SAN MARTIN (1981) concluiu que a repartição transversal de carga é realizada com base no coeficiente de repartição transversal que é determinado através da aplicação de uma carga unitária sobre qualquer transversina do tabuleiro.

$$r_{ie} = \frac{1}{n} \left[1 + 6 * \frac{2i - n - 1}{n^2 - 1} * \frac{e}{\varepsilon} \right] \quad (1)$$

em que: n é o número de longarinas da ponte;

i é o número da i ésima longarina, contando da esquerda para a direita;

e é a excentricidade da carga unitária P em relação ao centro O fixado no baricentro da seção transversal da ponte.

ε é a distância entre eixos das longarinas.



Método de Leonhardt

Método desenvolvido pelo alemão Leonhardt nas décadas de 40 e 50, considerado bastante prático e de tratamento matemático relativamente simples. Neste método foram ainda admitidas as seguintes:

- Todas as transversinas do tabuleiro são representadas por uma única transversina fictícia, apoiada no meio dos vãos das diversas longarinas;
- Esta transversina fictícia é considerada como simplesmente apoiada nas longarinas;
- Desprezam-se os efeitos de torção.

Sob ação de uma carga P_k unitária, o conjunto se deforma, originando reações $r_{1k}, r_{2k}, \dots, r_{ik}, \dots, r_{nk}$ denominadas "coeficientes de repartição transversal", onde r_{ik} é a reação correspondente à longarina "i" quando a carga unitária atua na transversina "k". Uma vez obtidos os coeficientes r_{ik} , a determinação dos esforços seccionais e reações de apoio nas longarinas pode ser feita de forma idêntica à do método de *Engesser-Courbon*. A deformabilidade do conjunto e, portanto, os valores dos coeficientes r_{ik} , dependem nos casos normais das seguintes grandezas: (1) da relação entre inércias da transversina (\bar{J}) e longarinas (J), expressa pelo parâmetro η , onde:

$$\eta = \frac{\bar{J}}{J} \quad (2)$$

(2) da relação entre o afastamento recíproco das longarinas (ε) e o vão (L), expressa pelo parâmetro λ e os coeficientes de repartição transversal serão função do grau de rigidez da estrutura, expresso pelo parâmetro ζ , onde:

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{L} \quad (3)$$

$$\zeta = \frac{\eta}{(2\lambda)^3} = \frac{\bar{J}}{J} \cdot \left(\frac{L}{2\varepsilon}\right)^3 \quad (4)$$

Tomando-se ζ como parâmetro de entrada, podem-se obter os coeficientes de repartição transversal tabelados para diversos casos, inclusive aqueles com longarinas externas com rigidez diferente das internas.

Método de Guyon-Massonet-Bares

De acordo com ALVES et al. (2004), o método de Guyon-Massonet-Bares foi inicialmente estudado por Guyon no ano de 1946 considerando a existência de pontes com numerosas longarinas o que levou a utilização de um sistema contínuo como placa ortotrópica. Massonet complementou o trabalho de Guyon incluindo torção nas vigas e criando o método dos coeficientes de distribuição transversal que posteriormente, em 1965, seria ampliado por Bares através do desenvolvimento de tabelas. A equação diferencial das lajes ortótropas é:

$$\rho_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (5)$$

em que $w(x,y)$ é uma função da ordenada da superfície elástica média da placa na configuração deformada. As rigidezes à flexão nas direções x e y e o efeito de torção na placa são, respectivamente.

$$\rho_x = \frac{h^3}{12} \frac{E_x}{(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (6)$$

$$\rho_y = \frac{h^3}{12} \frac{E_y}{(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (7)$$

$$H = \rho_{xy} + 2\gamma = \frac{E_x \nu_x}{(1 - \nu_x \nu_y)} + \frac{Gh^3}{12} \quad (8)$$

Segundo GUYON & MASSONET apud SAN MARTIN (1981), um tabuleiro com diversas longarinas e transversinas é fisicamente uma estrutura intermediária entre uma laje ortotrópica e uma grelha com vinculação rígida a torção. Contudo, devido ao valor do coeficiente de Poisson do concreto ser relativamente baixo é possível desprezar a rigidez a torção ρ_{xy} . Obtém-se, então, uma equação diferencial específica do método:

$$\rho_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\varphi \sqrt{\rho_x \rho_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (9)$$

Desse modo, com base num tabuleiro de largura infinita e comprimento finito L (figura 5) e em outro de dimensões finitas (figura 6) procurou-se obter uma solução exata para a equação (9).

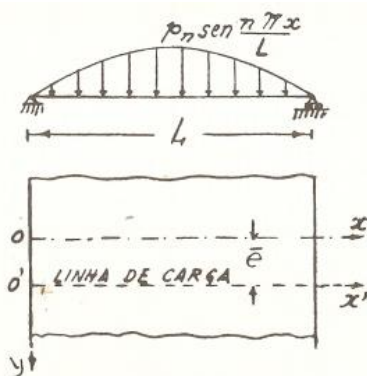


Figura 5 – Tabuleiro de largura infinita (SAN MARTIN, 1981).

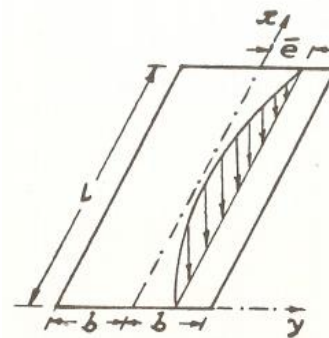


Figura 6 – Tabuleiro de dimensões finitas (SAN MARTIN, 1981).

GUYON & MASSONET apud SAN MARTIN (1981) levaram em consideração a composição de um trem tipo de pontes rodoviárias usual acrescido do peso próprio e concluíram que a melhor aproximação seria a de um carregamento senoidal.

$$p(x) = p \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (10)$$

Com isso, os autores conduziram a solução do problema baseando-se em duas premissas: tabuleiro com poucas longarinas e com muitas longarinas. Para o primeiro caso, a solução encontrada é idêntica à do método de Leonhardt. Já no segundo caso, considera-se uma

transversina elementar de largura dx como uma viga apoiada sobre uma base elástica (figura 7).

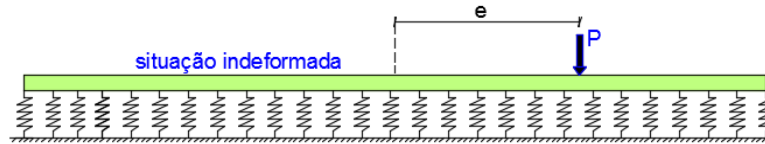


Figura 7 – Transversina sobre base elástica.

Dessa modelagem obtém-se a equação (11)

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\rho_L \pi^4}{\rho_T L^4} f(y) = 0 \quad (11)$$

Observa-se que a equação (11) é realmente análoga a de uma viga simplesmente apoiada sobre base elástica com módulo de recalque:

$$\bar{\mu}_0 = \rho_L \frac{\pi^4}{L^4} \quad (12)$$

Assim, a repartição transversal da carga senoidal pode ser caracterizada pelo índice de repartição transversal ou índice de *Guyon-Massonet* através da relação entre as funções de deslocamento que solucionam as equações (5) e (9).

$$\chi_0 = \frac{w}{w_m} \quad (13)$$

O índice de repartição transversal é um número sem dimensão, por isso que representa a relação entre o deslocamento vertical de um ponto da ponte carregada, excentricamente, com a carga linear senoidal e o deslocamento que corresponderia a esse mesmo ponto supondo a carga distribuída, uniformemente, em toda a largura do tabuleiro (GUYON & MASSONET apud SAN MARTIN, 1981). Então, como afirma ALVES et al. (2004), o índice de repartição transversal depende fundamentalmente dos seguintes parâmetros:

- a) Do coeficiente de travejamento θ , onde:

$$\theta = \frac{b}{L} \sqrt{\frac{\rho_x}{\rho_y}} \quad (14)$$

em que b é a semi-largura da placa equivalente e L é o comprimento da placa equivalente.

Os ρ_x e ρ_y são os parâmetros já definidos nas Eq. (3) e (4), respectivamente.

- b) Do parâmetro de torção φ definido na Eq. (6);
c) Da posição da carga, definida por sua excentricidade (fração da semi-largura);
d) Da posição da viga que se quer obter o índice χ_φ (fração da semi-largura).

Modelagem Computacional

Para comparar os resultados de coeficientes de influência calculados através dos modelos analíticos consagrados, foram desenvolvidos dois modelos computacionais que melhor se aproximariam dos analíticos, mas com algumas considerações que os tornaram mais

complexos. Nesse estudo foi utilizado concreto de 30 MPa e coeficiente de Poisson igual a 0,2.

Modelo de grelha

O modelo de analogia de grelha foi desenvolvido no SAP2000 considerando elementos de barra que representam as longarinas, as transversinas e a laje com as características apresentadas na descrição das pontes modelo com 3 e 5 longarinas. Desse modo foi possível avaliar o comportamento de um modelo que considera a rigidez a torção dos elementos, mas apenas no regime elástico-linear. Visando obter resultados de coeficientes de influência coerentes com os modelos analíticos, foi utilizada a técnica de carga unitária distribuída, no qual aplica-se um carregamento distribuído unitário diretamente ao longo dos balanços e das longarinas (SOUZA LIMA et al., 2010). O modelo utilizado e a distribuição do carregamento podem ser visualizados na figura 8.

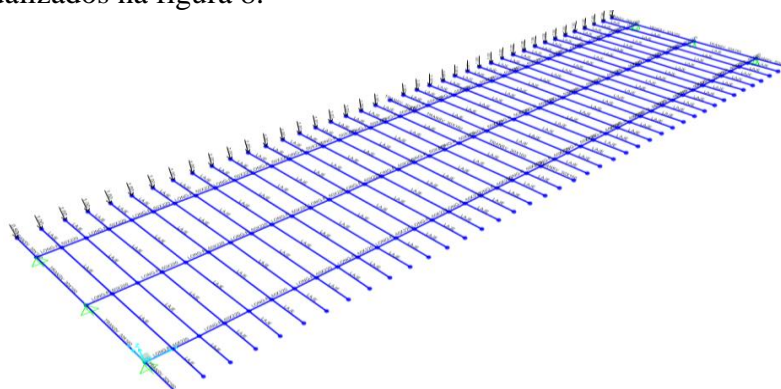


Figura 8 – Modelo de grelha com carga unitária distribuída.

Modelo de placa

O uso placas é frequentemente associado ao cálculo de esforços em tabuleiros de pontes (HAMBLY, 1991). Uma abordagem matematicamente exata para um problema de placa fina carregada sobre sua superfície requer solução de equações diferenciais de grande complexidade. Porém a aplicação da teoria clássica de Kirchhoff-Love para estas placas produz resultados suficientemente precisos (SZILARD, 2004).

As hipóteses simplificadoras adotadas pela teoria para dedução da equação de placa e que são utilizadas na análise pelo SAP2000®, são as seguintes:

- Material homogêneo, isotrópico e elástico linear, obediente à Lei de Hooke;
- Placa inicialmente plana;
- A superfície média da placa permanece indeformável durante a flexão;
- A espessura da placa é pequena em comparação às outras dimensões;
- Os deslocamentos transversais $w(x,y)$ são pequenos em relação à espessura da placa. Uma deflexão de até 1/10 da espessura é aceitável para uma teoria de pequenas deformações (SZILARD, 2004);
- As inclinações da superfície média da placa são pequenas;
- As seções transversais da placa tendem a permanecerem normais à superfície média da placa – hipótese de Bernoulli;
- As tensões normais na direção do eixo Z (σ_z) podem ser negligenciadas.



O elemento *Shell* no SAP2000® foi usado para modelar casca, membrana e placa em comportamento plano e estruturas tridimensionais e define elementos finitos, quadrangular, não distorcidos, por possuírem mais precisão. O comportamento de flexão da placa inclui dois sentidos: um componente de rigidez da placa a rotação e um componente de rigidez de translação na direção normal ao plano do elemento. As vigas são prismáticas, de comportamento elástico, homogêneo, isotrópico, submetido a cargas variáveis ao longo do eixo.

Resultados

Modelo com 3 longarinas

Como deseja-se obter os valores das parcelas de carga que se destinam para cada longarina, foi utilizado o parâmetro de coeficiente de influência através dos deslocamentos encontrados na região da transversina central de cada um dos modelos. Além disso, tal metodologia foi adotada porque todos os modelos analíticos estudados apresentam resultados de repartição de carga na forma de deslocamentos. A seguir é possível observar os valores encontrados para as longarinas extremas (mas distantes do eixo central do tabuleiro) e para as longarinas centrais.

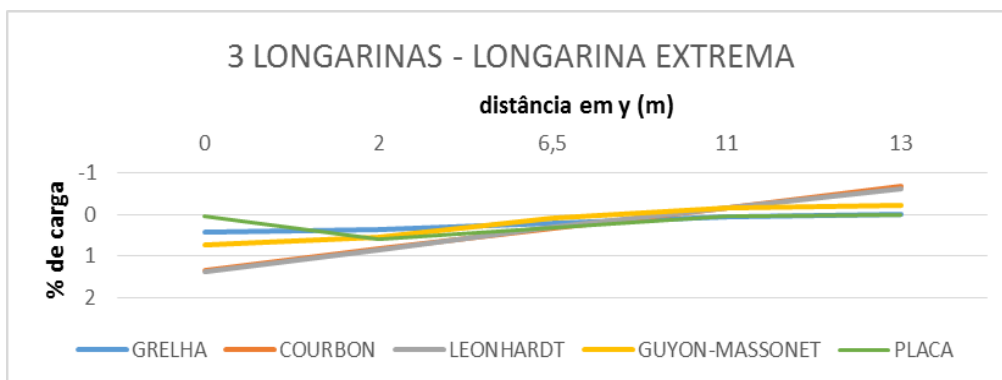


Figura 9 – Coeficientes de influência para as longarinas extremas.

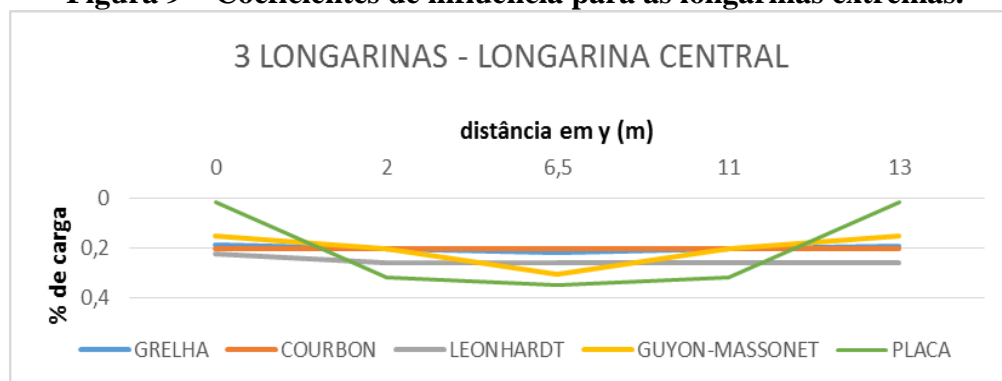


Figura 10 - Coeficientes de influência para a longarina central.

Comparando-se os modelos, constata-se que para as longarinas extremas os modelos de Courbon e de Leonhardt apresentam valores muito próximos e maiores do que os demais modelos. Isso se comprova, pois esses dois modelos não consideram a rigidez a torção no desenvolvimento do modelo, o que leva a ausência de distribuição de momentos fletores na forma de torção nas transversinas. Assim, com momentos fletores maiores, acabam

aparecendo maiores valores de deslocamento. No caso da longarina central, observam-se características semelhantes, mas com valores menores para o modelo de grelha, o que ocorreu devido a criação de barras de laje com rigidez equivalente que acabam fazendo com que a transversina, com maior rigidez a torção, absorva consideravelmente o momento fletor que iria para as longarinas, reduzindo o deslocamento do conjunto. Consta-se também que os modelos de placa resultaram em valores de deslocamento maiores no meio do vão, muito provavelmente devido à pouca rigidez a torção do conjunto.

Modelo com 5 longarinas

Para a análise com 5 longarinas foi realizado processo semelhante ao modelo com 3 longarinas. Nas figuras 11 a 13, observam-se os resultados.

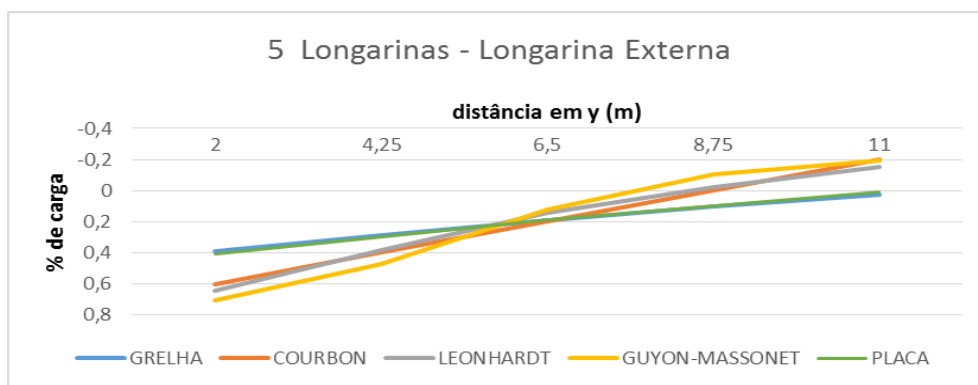


Figura 11 - Coeficientes de influência para as longarinas extremas.

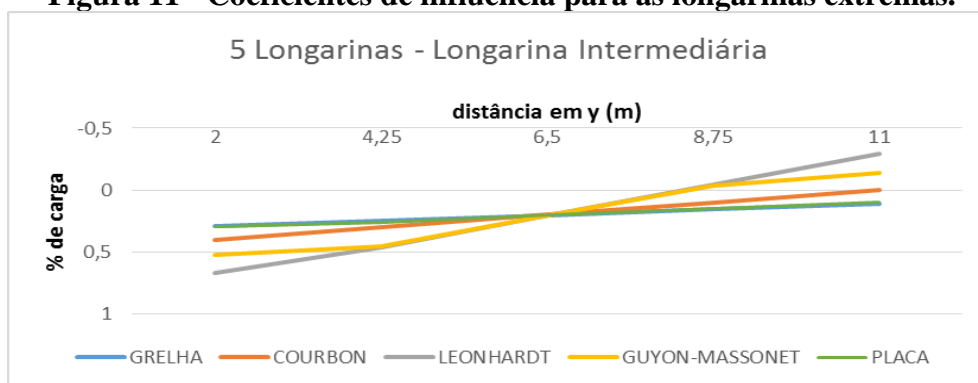


Figura 12 - Coeficientes de influência para as longarinas intermediárias.

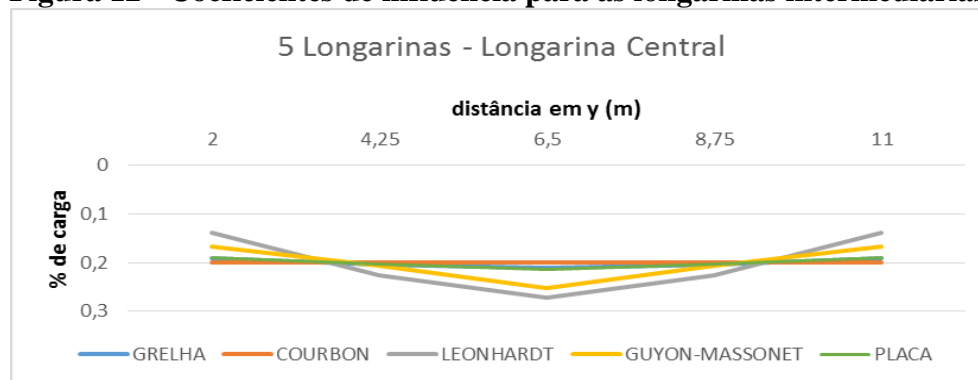


Figura 13 - Coeficientes de influência para a longarina central.



Alguns dos resultados já discutidos para o caso e 3 longarinas se repetem quando se estuda a ponte com 5 longarinas, observa-se, entre eles, a semelhança de resultados dos modelos de *Courbon* e *Leonhardt* para a longarina extrema e que vai se alterando para as demais. Entretanto, no caso de 5 longarinas, observa-se que os resultados encontrados no modelo de placa desenvolvido apresentou valores mais próximos do modelo de grelha, uma vez que com uma quantidade maior de longarinas o tabuleiro representado vai se tornando mais contínuo e se aproximando de uma placa.

Conclusões

No âmbito geral, os modelos apresentaram resultados de repartição de carga bastante semelhantes, com pequenas alterações. Assim, numa análise mais específica, constata-se que os modelos de *Courbon* e *Leonhardt* apresentam resultados menos precisos devido as simplificações adotadas, mas confiáveis. Já o método de *Guyon-Massonet* apresenta uma análise que só seria melhor representada ao modelar uma placa sob uma base elástica, fato que se evidencia apenas em pontes com vigas muito próximas. Os modelos desenvolvidos através do método do elementos finitos foram eficazes para analisar a repartição de carga, pois puderam fornecer resultados aproximados no que diz respeito ao objetivo principal deste trabalho que é de comparação entre os modelos analíticos e via MEF. Contudo, é interessante refinar melhor esses modelos para que outras análises sejam realizadas.

Referências

- ALMEIDA, S. M. F., MACHADO, A. C. M., “Influência das Transversinas nos Tabuleiros de Pontes em Vigas Múltiplas”, 2º Seminário Fluminense de Engenharia da Universidade Federal Fluminense, UFF, Niterói, RJ, 1996.
- ALMEIDA, S. M. F.; ALVES, E. V.; JUDICE, F.M, “Métodos de Análise Estrutural de tabuleiros de Pontes em Vigas Múltiplas de Concreto Protendido, ENGEVISTA”, v. 6, n. 2, p. 48-58, Agosto, 2004.
- HAMBLY, Edmund Cadbury. Bridge Deck Behavior. 2ª Edição. E & FN SPON, 1991.
- MARTIN, F. J. "Cálculo de Tabuleiros de Pontes", Ciência e Tecnologia, Rio de Janeiro, 1981.
- SORIANO, Humberto Lima. Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.
- SOUZA LIMA, S.; JUDICE, F.M.; PERLINGEIRO, M.S.P.L., “Avaliação da Distribuição Transversal de Cargas em Tabuleiros de Pontes sem Transversinas Internas”, 50º CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO - CBC2008, Rio de Janeiro, RJ, 2008.
- SZILARD, R. Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods. Hoboken: John Wiley & Sons, 2004.
- TIMOSHENKO, S; GOODIER, J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1951.