IX CONGRESSO BRASILEIRO DE PONTES E ESTRUTURAS
18 a 20 de maio, 2016 - Everest Rio Hotel
IXCBPE
Rio de Janeiro | Cidade Olímpica

Método dos Deslocamentos para Análise de Estruturas: Resoluções Numéricas de Equações Lineares

Rodolfo de Azevedo Palhares[1], Rafael de Azevedo Palhares[2], Lisarb Henneh Brasil[3], Dylson Junyer de Sousa Lopes[4], Matheus da Silva Menezes[5], Ivan Mezzomo[6]

[1] UFERSA / Departamento de Ciências Exatas / rodolfo.palhares@hotmail.com
[2] UFERSA / Departamento de Ciências Exatas / rafaelpalhareseng@hotmail.com
[3] UFERSA / Departamento de Ciências Exatas / brasil.lh@hotmail.com
[4] UFERSA / Departamento de Ciências Exatas / junyer.lopes@hotmail.com
[5] UFERSA / Departamento de Ciências Exatas / matheus@ufersa.edu.br
[6] UFERSA / Departamento de Ciências Exatas / imezzomo@ufersa.edu.br

Resumo

O Método dos Deslocamentos ou Método do Equilíbrio têm como ideia principal, determinar a solução que satisfaz, simultaneamente, as condições de equilíbrio e de compatibilidade de uma estrutura. Este método possui como solução final, as equações de equilíbrio, onde as variáveis principais são os deslocamentos e as rotações, conhecidos como deslocabilidades. A resolução manual de uma estrutura pelo Método dos Deslocamentos torna-se bastante complicada quando necessária a análise de uma estrutura que contêm um número excessivo de deslocabilidades, isto porque, para cada deslocabilidade, obtêm-se uma equação de equilíbrio, podendo-se chegar a resolução de matrizes complexas. Para tanto, concebe-se a implementação computacional para aplicação e resolução deste método. Para a resolução dos sistemas de equações lineares do problema em questão, utilizou-se o método direto de Gauss e o método iterativo de Gauss-Jacobi, com o auxílio do SCILAB, versão 5.5.2. Após a resolução dos sistemas, obteve-se resultados satisfatórios, quanto a representação final do diagrama de momento fletor da estrutura, para ambos os métodos numéricos simulados.

Palavras-chave

Método dos deslocamentos; Estruturas; Métodos numéricos; Momento fletor.

Introdução

De acordo com MARTHA (2010), o método dos deslocamentos, tem como ideia principal, determinar a solução que satisfaz, simultaneamente, as condições de equilíbrio e de compatibilidade de uma estrutura. Em outras palavras, o método superpõe uma série de soluções cinematicamente determinadas, que são configurações deformadas conhecidas e que satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura, para obter uma solução final que também satisfaça as condições de equilíbrio.
Cada solução cinematicamente determinada deve satisfazer, isoladamente, as condições de compatibilidade. No entanto, elas não satisfazem às condições de equilíbrio da estrutura original. As condições de equilíbrio da estrutura são solucionadas quando as soluções básicas são superpostas.

Geralmente, o método dos deslocamentos é utilizado para a solucionar grandes e complexas estruturas, logo são necessárias várias equações para a determinação das incógnitas. Para a resolução dos sistemas, normalmente, utilizam-se programas computacionais. Neste trabalho, o programa computacional utilizado para a resolução dos sistemas foi o SCILAB 5.5.2 através do método de direto de Gauss e o iterativo de Gauss-Jacobi.
O método de eliminação de Gauss (método direto) e o método de Gauss-Jacobi (método iterativo), são métodos de resolução de sistemas de equações algébricas lineares. No problema em questão, foram utilizados ambos os métodos, porém os melhores resultados foram apresentados pelo método direto.

Problema

Bastante utilizado na engenharia, é sabido que a resolução manual de uma estrutura pelo Método dos Deslocamentos torna-se bastante complicada quando necessária a análise de uma estrutura que contêm um número excessivo de deslocabilidades. Isto porque, para cada deslocabilidade, obtêm-se uma equação de equilíbrio, podendo-se chegar a resolução de matrizes complexas. Para tanto, concebe-se a simulação computacional para aplicação e resolução deste método.

Objetivos

O estudo aqui apresentado, tem como finalidade elencar os aspectos fundamentais para análise de estruturas pelo o Método dos Deslocamentos, exemplificando-os por meio da resolução analítica de um pórtico plano. Além disto, é objetivo do estudo, realizar a implementação computacional para a resolução do sistema de equações, aplicando o método direto de Gauss, e o método iterativo de Jacobi, de forma a verificar se a solução obtida através desses métodos é compatível com os resultados esperados para os esforços seccionais de momentos fletores da estrutura.

Referencial Teórico

Esta seção resume aspectos fundamentais para análise de estruturas reticuladas hiperestáticas, definidos pelo o método dos deslocamentos seguindo como principal referência, o livro "Métodos básicos da análise de estruturas" do autor MARTHA (2010).

Método dos Deslocamentos

De acordo com MARTHA (2010), o método dos deslocamentos, tem como ideia principal, determinar a solução que satisfaz, simultaneamente, as condições de equilíbrio e de compatibilidade. Em outras palavras, o método superpõe uma série de soluções cinematicamente determinadas, que são configurações deformadas conhecidas e que satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura, para obter uma solução final que também satisfaça as condições de equilíbrio.
Cada solução cinematicamente determinada, ou caso básico, satisfaz isoladamente as condições de compatibilidade, quanto a continuidade interna e compatibilidade com respeito aos vínculos externos da estrutura, porém, não satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura original,

uma vez que são necessários forças e momentos adicionais para manter o equilíbrio. As condições de equilíbrio da estrutura ficam restabelecidas quando se superpõem todas as soluções básicas (SORIANO, 2005).
O método também é chamado de Método do Equilíbrio, pois as equações finais, são equações de equilíbrio tendo como variáveis principais (incógnitas), os deslocamentos e rotações, denominados deslocabilidades.
É bastante aplicado para resolução de estruturas grandes e complexas, e, portanto, exigem a solução de um grande número de equações, sendo comumente adaptável a programação automática, com auxílio de computadores (MARTHA, 2010).

Sistema Hipergeométrico e Deslocabilidade

A estrutura auxiliar utilizada nas soluções básicas do método dos deslocamentos é denominada de estrutura cinematicamente determinada, que pode ser entendida como a estrutura obtida da estrutura original pela adição dos vínculos necessários para impedir as deslocabilidades. Essa estrutura cinematicamente determinada auxiliar, é chamada de Sistema Hipergeométrico (SH), e possui configuração deformada conhecida (MARTHA, 2010).
A figura a seguir, exibe a configuração deformada de um pórtico plano formada pela superposição de configurações deformadas elementares, cada uma associada a um determinado efeito que é isolado.

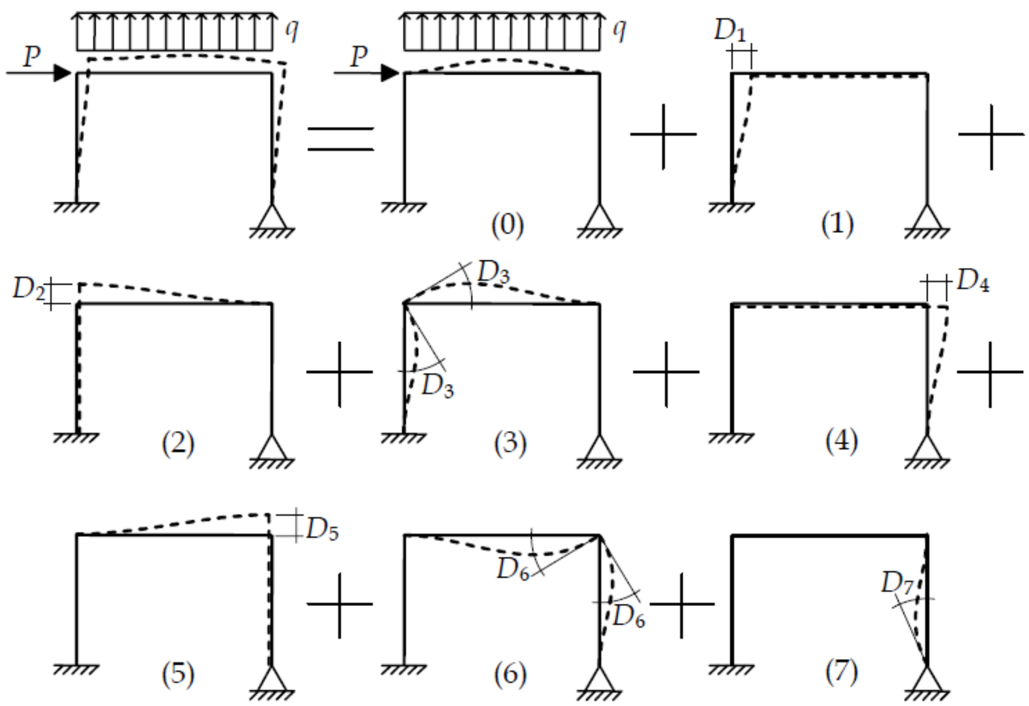

Figura 1 – Configuração deformada de um pórtico plano formada pela superposição de configurações deformadas elementares.

Uma observação importante é que, em oposição ao método das forças, onde existem vários possíveis Sistemas Principais para uma estrutura, no método dos deslocamentos existe somente um Sistema Hipergeométrico, que é obtido impedindo todas as deslocabilidades.
Como já citado, o Método dos Deslocamentos tem como estratégia procurar, dentre todas as configurações deformadas que satisfazem a compatibilidade, aquela que também faz com que o equilíbrio seja satisfeito. O equilíbrio da estrutura é imposto na forma de equilíbrio dos nós isolados, considerando também que as barras isoladas estão em equilíbrio. Ou seja, o problema recai em encontrar os valores que as incógnitas (deslocabilidades) devem ter para que os nós internos fiquem em equilíbrio, visto que os nós dos apoios têm seu equilíbrio automaticamente satisfeito pelas reações de apoio.
São chamadas de deslocabilidades, as componentes de deslocamentos e rotações dos nós que estão livres, e que devem ser conhecidas para determinar a configuração deformada de uma estrutura. Em outras palavras, as deslocabilidades são os parâmetros que definem a configuração deformada de uma estrutura. Em suma, as deslocabilidades são as incógnitas do Método dos Deslocamentos (MARTHA, 2010).

Casos Básicos e Reestabelecimento das condições de equilíbrio

No Caso (0), isola-se o efeito do carregamento externo e anulam-se as demais deslocabilidades. As reações, forças e momentos, dos apoios fictícios para equilibrar o Sistema Hipergeométrico são chamados de termos de carga e são representados por (βi0). Essas reações são calculadas de maneira a equilibrar os nós internos, e neste caso somente as barras que possuem carregamento no seu interior apresentam esforços internos e deformações.
Nos demais casos básicos, isolam-se, para cada caso, os efeitos de uma deslocabilidade Di, mantendo nulos os valores das demais deslocabilidades. As forças e momentos que aparecem nos apoios fictícios para equilibrar o Sistema Hipergeométrico quando é imposta uma configuração onde Dj=1, são chamados de coeficientes de rigidez global kij.
A partir dos resultados obtidos para os termos de carga e coeficientes globais, utiliza-se a superposição dos casos básicos para reestabelecer as condições de equilíbrio, onde as resultantes de forças e momentos externos nos nós devem ser iguais a zero (SORIANO, 2005).
A equação de equilíbrio na direção da deslocabilidade Di para uma estrutura com n deslocabilidades, pode ser generalizada da seguinte forma:

$$\beta i0 + \sum_{j=1}^{j=n} kij \; . \; Dj = 0 \tag{1}$$

Os valores encontrados para as deslocabilidades fazem com que a resultante das forças e momentos externos que atuam nos nós internos da estrutura (apoios fictícios) sejam nulas, atingindo assim, além das condições de compatibilidade, as condições de equilíbrio, visto que as forças e momentos externos aplicados ao nó são nulos. O equilíbrio nos demais nós é satisfeito pelas reações de apoio, cujo os valores das reações podem ser obtidos pela superposição dos valores das reações obtidos em cada caso (MARTHA, 2010).

Determinação dos Esforços Internos

Os diagramas finais dos esforços da estrutura são obtidos pela superposição dos diagramas de cada caso básico calculado, aplicando as seguintes equações:

$$N = No + \sum_{j=1}^{j=n} Nj \,.\, Dj = 0 \tag{2}$$

$$Q = Qo + \sum_{j=1}^{j=n} Qj \,.\, Dj = 0 \tag{3}$$

$$M = Mo + \sum_{j=1}^{j=n} Mj \,.\, Dj = 0 \tag{4}$$

Sendo *No*, o diagrama de esforços normais no caso (0), *Nj* o diagrama de esforços normais no caso (j). Analogamente aos esforços normais, temos que Q representa o diagrama de esforços cortantes, e M representa o diagrama de momentos fletores.

Matriz de rigidez global e vetor dos termos de carga

Com os valores dos termos de cargas e dos coeficientes de rigidez global pode-se se reescrever o sistema de equações de equilíbrio de uma forma matricial. No caso geral de uma estrutura com n deslocabilidade, temos:

$$\{\beta o\} + \{K\}\{D\} = \{0\} \tag{5}$$

Sendo {βo} o vetor dos termos de carga, {K} a matriz de rigidez global, e {D} o vetor das deslocabilidades.
Percebe-se que o número de equações de equilíbrio na equação matricial é igual ao número de deslocabilidades, e que a matriz de rigidez global independe dos carregamentos externos. Isto quer dizer que a matriz de rigidez global é uma característica inteiramente da estrutura, pois segundo MARTHA (2010), só existe um possível Sistema Hipergeométrico para cada estrutura.

Metodologia

A resolução manual de uma estrutura pelo Método dos Deslocamentos torna-se bastante complicada quando necessária a análise de uma estrutura que contêm um número excessivo de deslocabilidades, isto porque, para cada deslocabilidade, obtêm-se uma equação de equilíbrio, podendo-se chegar a resolução de matrizes complexas. Para tanto, concebe-se a implementação computacional para aplicação e resolução deste método.

Estrutura Analisada

Como mostrado na Figura 2, a estrutura de análise é um pórtico plano com carregamento concentrado de 10 KN no nó esquerdo da barra horizontal, e carregamento distribuído de 10 KN/m, e articulação (rótula) na extremidade direita da barra horizontal. As características da estrutura são: Módulo de elasticidade (E) igual a 24,5 x 10^6 KN/m^2; Momento de inércia (I) igual a 0,024m^4; e relação entre área da seção transversal (A) e (I) igual a $2m^{-2}$.

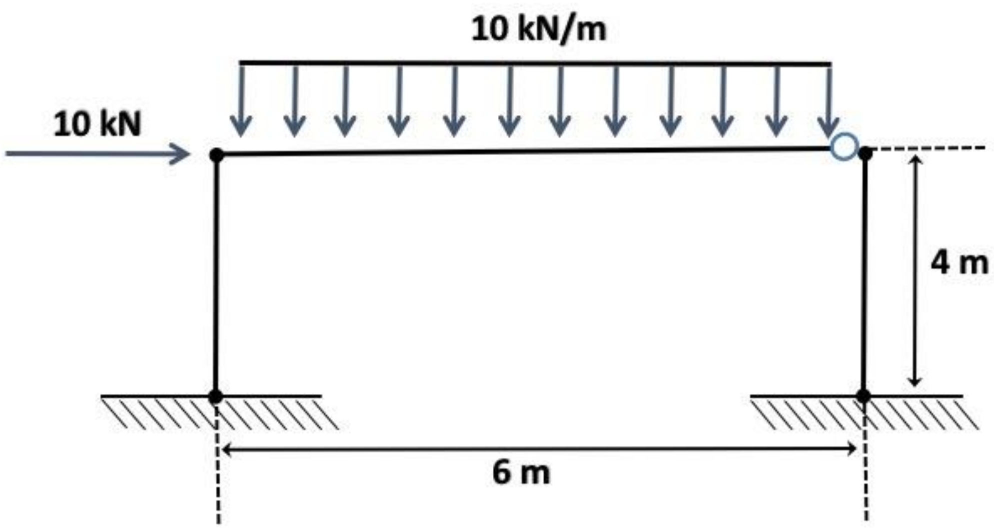

Figura 2 – Pórtico plano utilizado na análise.

Ferramenta Computacional

Para a resolução dos sistemas de equações lineares, do estudo em questão, utilizamos o método direto de Gauss e o método iterativo de Gauss-Jacobi com o auxílio do “software” SCILAB 5.5.2, que de acordo com FERREIRA (2009), é um programa desenvolvido de forma a dispor, em um só ambiente, de ferramentas de cálculo numérico, programação e gráficos.
Quanto a escolha dos métodos numéricos não se utilizou nenhum critério. Entretanto, para a escolha do “software” levou em consideração a facilidade do programa, bem como gratuidade, rapidez de processamento e clareza das informações dadas pelo programa.
A parte final do trabalho se dará por analisar a os resultados dos dois métodos, direto (Eliminação de Gauss) e iterativo (Gauss-Jacobi), e fazer uma comparação levando em consideração a discrepância dos dados, a quantidade de iterações do método de Gauss-Jacobi e o tempo de processamento.

Após o cálculo analítico da estrutura em questão, resultou o sistema de equações mostrados a seguir.

$$\begin{bmatrix} -10 \\ 37,5 \\ 45 \\ 0 \\ 22,5 \\ 0 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 0.5208333 & 0 & 0.375 & -0.3333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5138889 & 0.0833333 & 0 & -0.0138889 & 0 \\ 0.375 & 0.0833333 & 1.5 & 0 & -0.0833333 & 0 \\ -0.3333333 & 0 & 0 & 0.5208333 & 0 & 0.375 \\ 0 & -0.0138889 & -0.0833333 & 0 & 0.5138889 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \\ D6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para verificar a diferença dos resultados obtidos com cada método, quanto aos esforços internos da estrutura, calculou-se os momentos fletores em cada nó da estrutura, por meio da Equação (4), e traçamos dois diagramas de momento fletor.

Resultados e Discussão

Para simplificação de cálculo manual, objetivando-se trabalhar com um reduzido grau de indeterminação cinemática, SORIANO (2005) desconsidera a deformação quanto aos esforços normais das barras, ou seja, considera que as barras não se deformam axialmente. No entanto, com o intuito de se obter resultados mais precisos na análise, neste estudo, foi considerado todas as barras sendo do tipo extensíveis. Neste sentido, foram calculadas todas as deslocabilidades do Sistema Hipergeométrico.

Para resolução do sistema linear, no SCILAB, adotou-se uma precisão de 10^{-5} e um limite de 100 iterações para o método iterativo de Gauss-Jacobi. Inicialmente, foi identificado que a matriz de rigidez da estrutura não satisfez os critérios de linhas e colunas, e em seguida, verificamos o máximo vetor resíduo, e o tempo de processamento, para cada método.

Para o método direto, o tempo de processamento foi de 0,157 segundos, e o máximo vetor resíduo 2,152 x 10^{-14}. Para o método iterativo, o tempo de processamento foi de 0,5 segundos, e o máximo vetor resíduo, foi de 0,000739. Como resultado, constatamos que o método de Gauss obteve menor tempo de processamento e erro.

Após a análise dos resultados dado pelo método direto (Gauss) e pelo método iterativo (Gauss-Jacobi), verificou-se a similaridade dos dados, onde a maior diferença das incógnitas, comparando os resultados para cada método, foi de 0,01173.

Essa semelhança se deu devido à convergência do método iterativo, que atingiu a convergência com 85 iterações. Isto favoreceu o resultado final da estrutura de análise, que apresentou valores de momentos fletores muito próximos, satisfazendo assim a representação dos esforços seccionais da estrutura, quanto a momento fletor.

Como os valores de momentos fletores foram muito próximos, não perceptíveis na representação gráfica, é mostrado a seguir na Figura 3, o traçado do diagrama de momentos fletores da estrutura em questão, que é representativo para os resultados obtidos para cada método numérico.

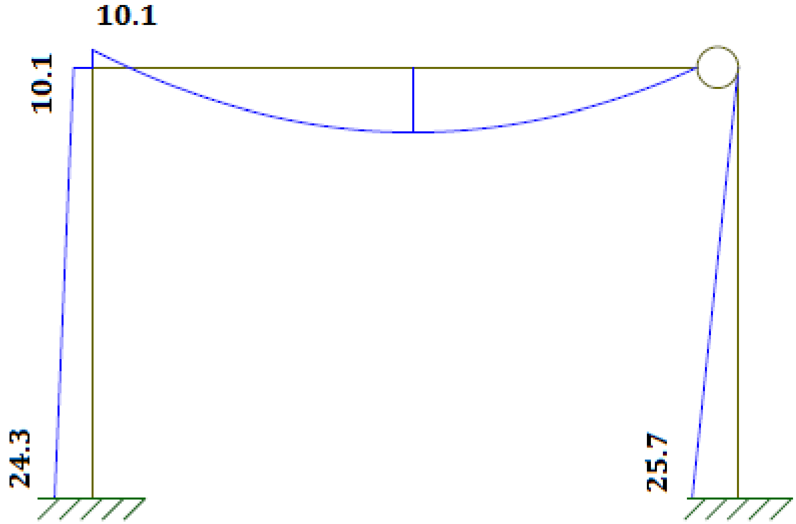

Figura 3 – Diagrama de momentos fletores em KN.m.

Desta forma, ficou evidenciada a eficiência de ambos os métodos numéricos analisados, uma vez que ambos conseguiram representar o comportamento real da estrutura, quando solicitada ao carregamento externo indicado no problema.

Conclusão

Com a realização deste estudo, pôde-se notar a similaridade entre os resultados obtidos através da aplicação do método direto de Gauss, e do método iterativo de Gauss-Jacobi. Comparando os resultados obtidos, concluiu-se que embora os resultados apresentados não tenham sido exatamente iguais, ambos os resultados foram satisfatórios para a representação final do diagrama de momento fletor da estrutura em questão.

Percebe-se que o número de equações de equilíbrio na equação matricial é igual ao número de deslocabilidades, e que a matriz de rigidez global independe dos carregamentos externos. Isto quer dizer que a matriz de rigidez global é uma característica inteiramente da estrutura, pois segundo MARTHA (2010), só existe um possível Sistema Hipergeométrico para cada estrutura.

Referências

FERREIRA, J. Á. T. Uso do Scilab na disciplina Cálculo Numérico. UFOP, Ouro Preto, 2009.

MARTHA, Luiz Fernando. Métodos básicos da análise de estruturas. Elsevier, Rio de Janeiro, 2010.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. S. Análise de estruturas: formulação matricial e implementação computacional. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2005.