



Flambagem de Estaca com Contenção Lateral **Ilo Dias Borba da Costa¹**

¹ Conprel – Construções, Projetos e Representações Ltda/Departamento de Cálculo Estrutural/iloborba@yahoo.com.br

Resumo

Neste trabalho sobre flambagem de estaca, considera-se o efeito da contenção lateral do solo, devido à ação do empuxo passivo que atua sobre as mesmas. Para o desenvolvimento do mesmo, foi utilizado o Método de Energia, supondo-se que a estaca se comporta para a deformação lateral, conforme a teoria geral das vigas sobre base elástica. Nestas condições, a carga crítica de flambagem da estaca é determinada em função das características físicas e geométricas da estaca, e ainda, do coeficiente de reação horizontal do solo sobre a mesma. Tomando como referencia os resultados obtidos, procura-se verificar a influência da variação do coeficiente de reação horizontal sobre a carga crítica de flambagem da estaca, para que se possa, a partir daí, tirar conclusões úteis, que poderão ser utilizadas nas atividades de projetos estruturais.

Palavras-chave

Flambagem; Estaca.

Introdução

Neste trabalho, procuramos estudar o problema de flambagem da parte imersa de estacas, que atravessam camadas extensas de solos compressíveis.

Deverá ser utilizado o Método de Energia, baseado nas seguintes hipóteses de cálculo, que são desfavoráveis à flambagem:

- a) A estaca é articulada nas suas extremidades.
- b) Para a deformação lateral, a estaca que comporta de acordo com a teoria das vigas sobre base elástica.
- c) É desprezada a resistência por atrito lateral entre a estaca e o solo.

Aplicação do Método de Energia

Consideremos uma estaca com as suas extremidades articuladas, que sob a ação de uma carga vertical P (figura 1), sofre uma pequena flexão no sentido transversal da mesma.

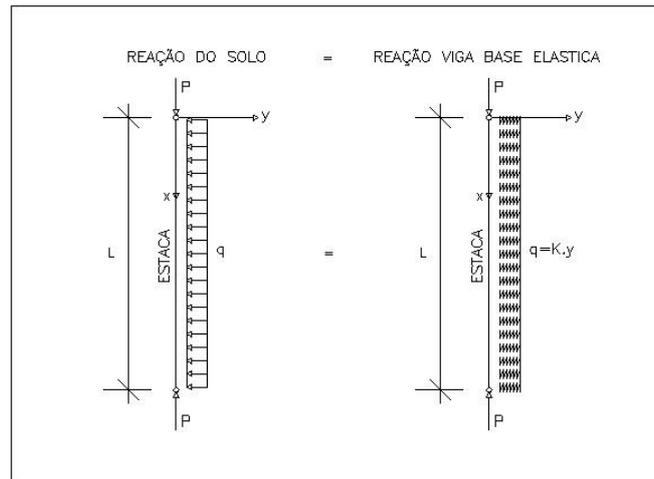


Figura 1

O trabalho realizado pelo agente externo (carga vertical P) pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$W_1 = (1/2) \cdot P \cdot \int (dy/dx)^2 \cdot dx \quad (0 < x < L) \quad (1)$$

A energia de deformação devido a flexão da estaca é obtida pela expressão:

$$W_2 = (1/2) \cdot \int M^2 / (E \cdot J) \cdot dx \quad (0 < x < L) \quad (2)$$

Aonde:

E = módulo de elasticidade do material da estaca

J = momento de inércia da seção transversal da estaca

A equação diferencial da linha elástica da estaca é obtida através de:

$$d^2y / dx^2 = - M / (E \cdot J) \quad (3)$$

$$M = - (d^2y / dx^2) / (E \cdot J) \quad (4)$$

Substituindo-se o valor de M na equação anterior (W_2), tem-se:

$$W_2 = (1/2) \cdot \int ((d^2y / dx^2) / (E \cdot J))^2 \cdot dx / (E \cdot J) \quad (0 < x < L) \quad (5)$$



$$W_2 = (1/2) \cdot \int E \cdot J \cdot (d^2y / dx^2)^2 \cdot dx \quad (0 < x < L) \quad (6)$$

A energia de deformação do meio elástico é obtida através de:

$$W_3 = (1/2) \cdot \int q \cdot y \cdot dx \quad (0 < x < L) \quad (7)$$

Aonde:

q = reação do solo, por unidade de comprimento da estaca

y = deformação transversal da estaca

A expressão que relaciona a reação do solo com a deformação transversal da estaca é:

$$q = K \cdot y \quad (8)$$

O valor de K representa a pressão, que aplicada ao solo, produz uma deformação unitária.

O mesmo é denominado de Coeficiente de Reação Horizontal.

Substituindo-se a expressão da reação do solo (q), na equação da energia de deformação do meio elástico (W₃), se obtém a seguinte expressão:

$$W_3 = (1/2) \cdot \int K \cdot y \cdot y \cdot dx \quad (0 < x < L) \quad (9)$$

$$W_3 = (1/2) \cdot \int K \cdot y^2 \cdot dx \quad (0 < x < L) \quad (10)$$

A carga crítica de flambagem da estaca corresponde ao menor valor da carga vertical P, obtido através da igualdade entre o trabalho realizado pelo agente externo (P) e a energia total de deformação da estaca, sendo expresso pela seguinte equação:

$$W_1 = W_2 + W_3 \quad (11)$$

Substituindo-se as expressões anteriormente apresentadas na equação acima, se obtém a seguinte expressão:

$$(1/2) \cdot P \cdot \int (dy/dx)^2 \cdot dx = (1/2) \cdot \int E \cdot J \cdot (d^2y / dx^2)^2 \cdot dx + (1/2) \cdot \int K \cdot y^2 \cdot dx \quad (0 < x < L) \quad (12)$$

A equação da linha elástica pode ser representada por uma Série de Fourier, em senos, através da expressão:

$$y = \sum \text{sen} (n \cdot (\pi / L)) \cdot x \quad (1 < n < \infty) \quad (13)$$

Operacionalizando as duas últimas equações apresentadas, se obtém a expressão que permite calcular a carga crítica de flambagem da estaca:

$$P_{fl} = E \cdot J \cdot (\pi / L)^2 \cdot (n^2 + m/n^2) \quad (14)$$

Aonde:

$$m = K \cdot (L / \pi)^4 / (E \cdot J) \quad (15)$$

A carga crítica de flambagem da estaca estará ligada ao valor mínimo da expressão:

$$\text{Valor mínimo } (n^2 + m/n^2) \quad (16)$$

Análise dos Resultados

Os seguintes casos (figura 2) poderão acontecer:

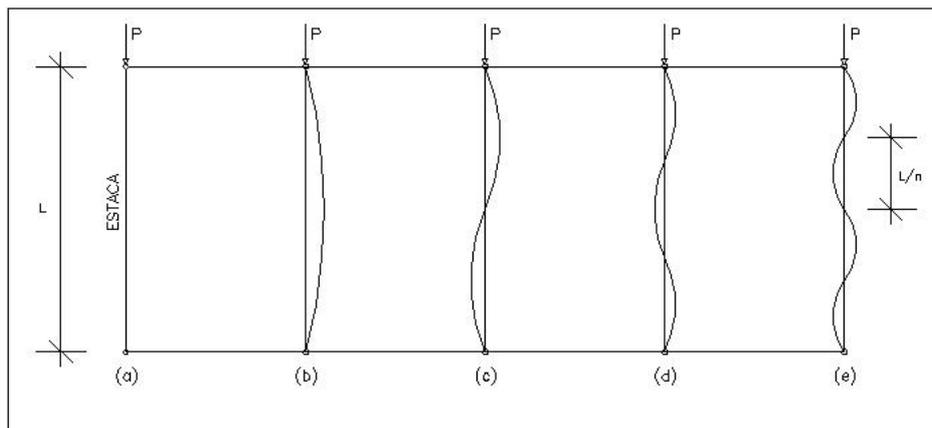


Figura 2

a) $K = 0$ (o solo não oferece resistência à deformação transversal da estaca)

$$n = 1$$

Nestas condições, teremos:

$$m = 0$$

Substituindo-se os valores acima indicados, na expressão geral da carga crítica de flambagem da estaca, se obtém a fórmula da Carga Crítica de Euler:

$$P_{fl} = E \cdot J \cdot (\pi / L)^2 \quad (17)$$

b) $K \neq 0$ (o solo oferece resistência a deformação transversal da estaca)

$$n = 1$$



Neste caso, teremos:

$$m = K \cdot (L / \pi)^4 / (E \cdot J)$$

$$n^2 + m / n^2 = 1^2 + m / 1^2 = 1 + m = 1 + K \cdot (L / \pi)^4 / (E \cdot J) \quad (18)$$

Substituindo-se o valor acima indicado na expressão geral da carga crítica de flambagem da estaca, se obtém a seguinte fórmula:

$$P_{fl} = E \cdot J \cdot (\pi / L)^2 \cdot (n^2 + m/n^2) \quad (19)$$

$$P_{fl} = E \cdot J \cdot (\pi / L)^2 \cdot (1 + K \cdot (L / \pi)^4 / (E \cdot J)) \quad (20)$$

$$P_{fl} = E \cdot J \cdot (\pi / L)^2 + K \cdot (L / \pi)^2 \quad (21)$$

c) $K \neq 0$ (o solo oferece resistência a deformação transversal da estaca)

$$n > 1$$

Nestas condições, para que o valor da carga crítica de flambagem da estaca seja mínima, o número n deverá crescer com o valor de K .

Desta forma, a carga crítica de flambagem da estaca deverá ser a mesma, para diferentes números de meias ondas.

Assim, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$n^2 + m/n^2 = (n + 1)^2 + m \cdot (n + 1)^2 \quad (22)$$

Desenvolvendo-se esta expressão, se obtém a seguinte equação do segundo grau:

$$n \cdot (n + 1) = m^{1/2} \quad (23)$$

$$n^2 + n - (K \cdot (L / \pi)^4 / (E \cdot J))^{1/2} = 0 \quad (24)$$

Portanto, a partir desta equação, se poderá determinar o número n de meias ondas, com as quais a estaca tenderá a flambar.

Em qualquer das situações acima citadas, deverão ser verificadas a capacidade de carga estrutural da estaca, bem como, a capacidade de carga geotécnica da mesma.

Coeficiente de Reação Horizontal (K)

No caso de estacas, esta avaliação é bastante complexa, levando-se em consideração que a reação do solo varia de forma sensível, de uma camada para outra.

Sabe-se ainda, que esta avaliação é de natureza essencialmente empírica, sendo influenciada por inúmeros parâmetros, tais como: deformações, profundidades, diâmetros das estacas, tipos de carregamentos, etc.

Para solos coesivos pré-adensados, pode se considerar o Coeficiente de Reação Horizontal (K) constante (figura 3), sendo o mesmo obtido a partir de ensaios realizados em placas quadradas, apoiadas em bases elásticas.

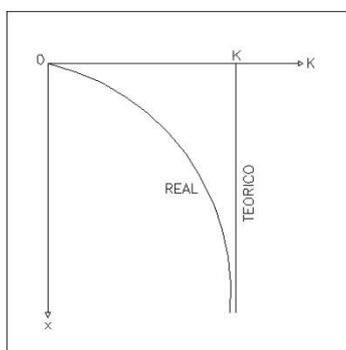


Figura 3

Na utilização em projetos estruturais, se poderá adotar os valores indicados na tabela 1, recomendados por TERZAGHI (1955).

Tabela 1 – Coeficientes de Reação Horizontal (K)

Resistência a compressão simples	Ordem de K (kg/cm ²)	Valor provável de K (kg/cm ²)
0,2 – 0,4 kg/cm ²	7,0 – 40,0	8,0
1,0 – 2,0 kg/cm ²	30,0 – 65,0	50,0
2,0 – 4,0 kg/cm ²	65,0 – 130,0	100,0
> 4,0 kg/cm ²	> 130,0	195,0

Aplicações Numéricas

1 - Calcular a carga admissível de flambagem de uma estaca de concreto armado, com comprimento de 20,00 m, diâmetro de 0,35 m e capacidade de carga nominal de 70,00 t, que atravessa uma camada de argila mole, com Coeficiente de Reação Horizontal $K = 4,00 \text{ kg/cm}^2$ e espessura $L = 8,00 \text{ m}$.

A estaca possui $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ e armação em Aço CA-50.



O limite de escoamento do aço é $f_y = 5,00 \text{ t/cm}^2$.

Adotar o coeficiente de segurança $v = 2$.

A capacidade de carga estrutural admissível da estaca é:

$$A = \pi \times 0,35^2 / 4,00 = 0,0962 \text{ m}^2 = 962,00 \text{ cm}^2$$

$$f_{ci} = 0,85 \times 0,25 / 1,40 + 0,008 \times 4,00 / 1,15 = 0,1796 \text{ t/cm}^2$$

$$N_{adm} = 0,85 \times 962,00 \times 0,1796 / 2,00 = 73,43 \text{ t} = 70,00 \text{ t}$$

$$E_{ci} = 5.600 \times f_{ck}^{1/2} = 5.600 \times 25^{1/2} = 28.000,00 \text{ MPa}$$

$$\alpha_i = 0,80 + 0,20 \times 25 / 80 = 0,8625$$

$$E_{cs} = \alpha_i \times E_{ci} = 0,8625 \times 28.000,00 = 24.150,00 \text{ MPa}$$

Para um concreto com idade $t = 7 \text{ dias} < 28 \text{ dias}$, tem-se:

$$E_{cs} = 0,65^{1/2} \times 24.150,00 = 19.470,00 \text{ Mpa} = 19,47 \times 10^5 \text{ t/m}^2$$

$$J = \pi \times 0,35^4 / 64,00 = 73,66 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$E \times J = 19,47 \times 10^5 \times 73,66 \times 10^{-5} = 1.434,16 \text{ t} \times \text{m}^2$$

$$L = 8,00 \text{ m}$$

$$K = 4,00 \text{ kg/cm}^2 = 40,00 \text{ t/m}^2$$

$$m = K \cdot (L / \pi)^4 / (E \cdot J) = 40,00 \times (8,00 / 3,14)^4 / 1.434,16 = 1,175$$

$$n \cdot (n + 1) = m^{1/2}$$

$$n \cdot (n + 1) = 1,175^{1/2} = 1,08$$

$$n^2 + n - 1,08 = 0,00$$

$$n_1 = 0,66 \quad ; \quad n_2 = -1,66 \quad (\text{não tem sentido físico})$$

Adotar: $n = 1,00$

$$P_{fl} = E \cdot J \cdot (\pi / L)^2 + K \cdot (L / \pi)^2$$

$$P_{fl} = 1.434,16 \times (3,14 / 8,00)^2 + 40,00 \times (8,00 / 3,14)^2$$

$$P_{fl} = 220,94 + 259,65 = 480,59 \text{ t}$$



A carga admissível de flambagem da estaca é:

$$N_{fl} = 480,59 / 2,00 = 240,30 \text{ t} > 70,00 \text{ t}$$

No caso de ser desprezada a contenção lateral do solo, a verificação de flambagem da estaca é realizada através da Fórmula de Euler, sendo a carga admissível de flambagem igual a:

$$N_{fl} = 220,94 / 2,00 = 110,47 \text{ t} > 70,00 \text{ t}$$

A armação da estaca será obtida da seguinte forma:

$$A_{cn} = 1,40 \times 70,00 / 0,1796 = 546,00 \text{ cm}^2 < 962,00 \text{ cm}^2$$

$$A_{se} = 0,008 \times 546,00 = 4,37 \text{ cm}^2$$

Na situação mais desfavorável, tem-se:

$$A_{se} = 0,008 \times 962,00 = 7,70 \text{ cm}^2$$

Adotar: a) Armação principal = 6 Ø 12.5

b) Armação de estribos = Ø 6.3 c 20

2 - Calcular a carga admissível de flambagem de uma estaca de perfil W 310 x 38,7 kg/m, com comprimento de 16,00 m e capacidade de carga nominal de 80 t, que atravessa uma camada de turfa, com um Coeficiente de Reação Horizontal $K = 2,00 \text{ kg/cm}^2$ e espessura $L = 6,00 \text{ m}$.

O perfil metálico da estaca é de Aço ASTM A 570 Grau 50.

O limite de escoamento do aço é $f_y = 3,50 \text{ t/cm}^2$.

Adotar coeficiente de segurança $v = 2$.

A capacidade de carga estrutural admissível da estaca é:

$$N_{adm} = 1,00 \times 37,20 \times 3,50 / (1,10 \times 1,50) = 79,00 \text{ t} = 80,00 \text{ t}$$

$$E = 20,00 \times 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$J_x = 8.581,00 \text{ cm}^4 = 85,81 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_y = 727,00 \text{ cm}^4 = 7,27 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \text{ (sentido mais desfavorável)}$$

$$E \times J_y = 20,00 \times 10^6 \times 7,27 \times 10^{-6} = 145,40 \text{ t} \times \text{m}^2$$

$$L = 6,00 \text{ m}$$



$$K = 2,00 \text{ kg/cm}^2 = 20,00 \text{ t/m}^2$$

$$m = K \cdot (L / \pi)^4 / (E \cdot J) = 20,00 \times (6,00 / 3,14)^4 / 145,40 = 1,834$$

$$n \cdot (n + 1) = m^{1/2}$$

$$n \cdot (n + 1) = 1,834^{1/2} = 1,35$$

$$n^2 + n - 1,35 = 0,00$$

$$n_1 = 0,765 \quad ; \quad n_2 = -1,765 \quad (\text{n\~{a}o tem sentido f\~{i}sico)}$$

Adotar: $n = 1,00$

$$P_{fl} = E \cdot J \cdot (\pi / L)^2 + K \cdot (L / \pi)^2$$

$$P_{fl} = 145,40 \times (3,14 / 6,00)^2 + 20,00 \times (6,00 / 3,14)^2$$

$$P_{fl} = 39,82 + 73,03 = 112,85 \text{ t}$$

A carga admiss\~{i}vel de flambagem da estaca \~{e}:

$$N_{fl} = 112,85 / 2,00 = 56,42 \text{ t} < 80,00 \text{ t}$$

No caso de ser desprezada a conten\~{c}o lateral do solo, a verifica\~{c}o de flambagem da estaca \~{e} realizada atrav\~{e}s da f\~{o}rmula de Euler, sendo a carga admiss\~{i}vel de flambagem igual a:

$$N_{fl} = 39,82 / 2,00 = 19,91 \text{ t} < 80,00 \text{ t}$$

Conclus\~{o}es

No estudo de flambagem da parte imersa de estacas, quando se leva em conta a conten\~{c}o lateral do solo, a carga cr\~{i}tica de flambagem \~{e} determinada em fun\~{c}o dos caracteres f\~{i}sicos e geom\~{e}tricos das estacas, e ainda, do Coeficiente de Rea\~{c}o Horizontal do solo.

A partir das equa\~{c}oes obtidas, verifica-se que, por mais fraco que seja o solo, a conten\~{c}o lateral provoca uma carga cr\~{i}tica de flambagem t\~{a}o elevada, que as estacas rompem por excesso de compress\~{a}o, antes de flambar.

As equa\~{c}oes citadas mostram ainda que, a possibilidade de flambagem nas estacas muito esbeltas, quando as mesmas atravessam camadas extensas de solos muito compress\~{i}veis.



Referências

- BORBA, I.D. – Estudo Elástico de Estaqueamentos – PUC – Rio de Janeiro, 1973.
- BORBA, I.D. – Análise de Estaqueamentos com Contenção Lateral – XVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural – Salvador, 1976.
- BOWLES, J.E. – Foundation Analysis and Design, McGraw-Hill, Book Company, 1968.
- BROMS, B.B. – Design of Laterally Loaded Piles, ASCE, vol. 91, n° SM3, May, 1965.
- BROMS, B.B. – Stability of Flexible Structures (Piles and Piles Groups) - Proceedings of the 5th European Conference in S.M. and F.E. – Madrid, 1972.
- DAVISSON, M.T. e ROBINSON, K.E. – Bending and Buckling of Partially Embedded Piles - International Conference on Soil Mechanics – Montreal, 1965.
- HARTOG, D. – Advanced Strength of Materials, McGraw-Hill, Book Company, 1952.
- HETENYI, M. - Beams on Elastic Foundation, Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1971.
- PALMER, L. e BROWN, P. – Piles Subjected to Lateral Thrust, ASTM, n° 154-A, June, 1954.
- REESE, L.C. e MATLOCK, H. – Foundation Analysis of Offshore Pile Supported Structures. Proceeding of the Foundation Engineering, Paris, 1961.
- REESE, L.C. e MATLOCK, H. - Generalized Solutions for Laterally Loaded Piles, ASCE, vol. 127, n° 3370, 1962.
- TERZAGHI, K. - Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction, Geotechnique, London, vol. V, n° 4, 1955.
- TIMOSHENKO, S.P. e GERE, J.M. - Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, Book Company, 1961.