



IX CONGRESSO BRASILEIRO DE PONTES E ESTRUTURAS
18 a 20 de maio, 2016 - Everest Rio Hotel

Determinação da Envoltória dos Esforços de uma Laje de Ponte através de uma Metodologia Alternativa para produzir Superfícies de Influência

Rafael Otávio Alves Abreu¹, Prof. Dr. Eduardo Aurélio Barros Aguiar²

¹ Universidade Estadual do Maranhão - UEMA / rafael_oabreu@hotmail.com

² Universidade Estadual do Maranhão - UEMA / Departamento de Engenharia de Construções e Estruturas / eduardoaguiar.eng@live.com

Resumo

Para o dimensionamento de uma placa submetida a cargas móveis, é de suma importância utilizar um procedimento que permita avaliar o máximo e o mínimo esforço interno no qual ela estará submetida, tendo em vista que esta carga pode assumir diversas posições ao longo da superfície da placa. Para isso, pode-se utilizar as Superfícies de Influência, sendo estas úteis para determinar as envoltórias dos esforços, que são gráficos que expressam como variam os valores de efeitos elásticos ao longo de uma estrutura. A principal aplicação deste procedimento está na análise estrutural de pontes de concreto armado ou protendido, cujas lajes atendem as hipóteses da teoria das placas finas para pequenas deflexões e podem ser analisadas pelos métodos descritos neste trabalho. A metodologia utilizada para determinar estas Superfícies de Influência e, conseqüentemente, as envoltórias, consiste na combinação do Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas. Tendo a formulação teórica estabelecida, é apresentado um exemplo numérico que consiste na determinação da envoltória dos esforços de uma laje contida em um tabuleiro de ponte, visando a avaliação do máximo esforço no qual esta estará submetida.

Palavras-chave

Lajes de Pontes; Método dos Elemento Finitos; Superfície de Influência.

Introdução

Placas são elementos estruturais bidimensionais que apresentam uma dimensão, a espessura, muito menor que as outras duas e cujas cargas atuam perpendiculares ao seu plano médio. As aplicações destas na engenharia civil são as lajes, os radiers e os tabuleiros de pontes. As lajes presentes nas pontes geralmente são semelhantes às de edifícios, diferindo apenas nos tipos de carga atuantes. Em edifícios, atuam sobretudo cargas fixas, e nas pontes, cargas móveis.

Por isso, para as lajes de pontes, é necessário fazer uma análise para detectar a condição mais crítica para o dimensionamento, já que a carga móvel, o trem-tipo, pode assumir qualquer posição ao longo da mesma. Para isto, neste trabalho, será utilizado o conceito da Superfície de Influência (SI) para produzir as envoltórias de esforços de forma relativamente simples.

Cargas Móveis na Análise Estrutural

Segundo Martha (2010), as envoltórias são gráficos que expressam a variação de um efeito elástico em seções previamente escolhidas da estrutura. O objetivo da análise de estruturas

sujeitas a carregamentos móveis é a determinação da envoltória dos máximos e mínimos do efeito elástico pesquisado (por exemplo, momento fletor). Para produzi-las, pode-se utilizar o procedimento das Linhas de Influência (LI) para estruturas composta por barras e as Superfícies de Influência para estruturas composta por placas.

Uma LI representa a variação de um determinado efeito elástico, em uma seção de uma estrutura reticulada, devido a uma força vertical orientada para baixo e unitária que percorre a toda a estrutura. Segundo Souza e Cunha (1998), a SI é uma extensão do procedimento da LI para estruturas bidimensionais. O valor da ordenada de um ponto desta SI representa o valor do efeito elástico produzido na seção de observação devido a uma carga unitária orientada na vertical e para baixo aplicada sobre o ponto onde se mensura a ordenada. Um exemplo de SI, produzida pela metodologia apresentada neste trabalho, é representado a seguir:

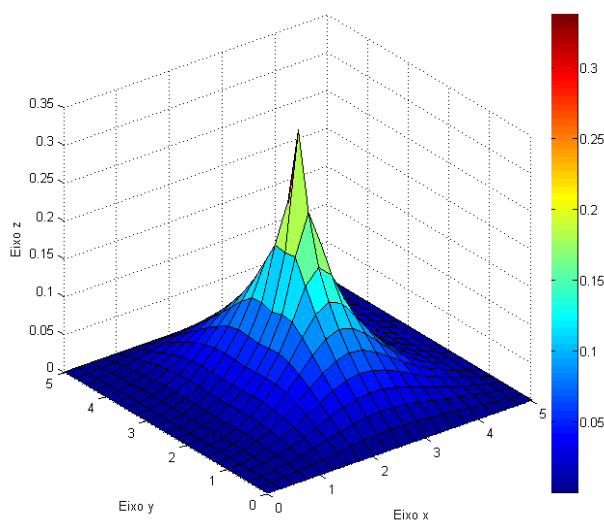


Figura 1 – Exemplo de Superfície de Influência

Para determinar o esforço elástico através de uma SI, basta aplicar a seguinte expressão:

$$E_s = \sum_{i=1}^n q_i V_i + \sum_{i=1}^n p_i A_i + \sum_{i=1}^n P_i w_i \quad (1)$$

sendo:

- q_i : intensidade do carregamento distribuído em área;
- V_i : volume da SI delimitado pelo carregamento distribuído em área em questão;
- p_i : intensidade do carregamento distribuído em linha;
- A_i : área da SI delimitada pelo carregamento distribuído em linha em questão;
- P_i : intensidade da força concentrada;
- w_i : ordenada da SI no ponto de aplicação da carga.

Teoria das Placas Finas para Pequenas Deflexões

Para definir uma SI, é necessário ter em mãos a formulação da teoria das placas. As expressões relativas à teoria das placas finas para pequenas deflexões são obtidas através de



equações de equilíbrio, compatibilidade e constitutivas. Sabendo que w é o deslocamento transversal da placa, p é o carregamento atuante na mesma, E é o módulo de elasticidade longitudinal, h é a espessura e ν é coeficiente de Poisson, tem-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (2)$$

sendo D a rigidez à flexão da placa, dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

Os esforços internos são expressos através das equações a seguir:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (7)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (8)$$

Por fim, é necessário definir as condições de contorno do problema. Sendo o eixo n perpendicular ao lado analisado, para um lado simplesmente apoiado, tem-se:

$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Para um lado perfeitamente engastado, tem-se:

$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Segundo Araújo (2014), a solução rigorosa da expressão (2) só pode ser obtida para alguns casos. Assim, é interessante empregar métodos numéricos para solucionar o problema. Dentre eles, está o Método das Diferenças Finitas (MDF), que é empregado na solução de problemas que envolvem equações diferenciais. Este método baseia-se em transformar as derivadas em diferenças finitas. Também se tem o Método dos Elementos Finitos (MEF), que consiste em subdividir o domínio do problema, criando uma malha, composta por um conjunto dos chamados elementos finitos, que podem ter diversos formatos e número de nós.

Superfícies de Influência

A metodologia utilizada neste trabalho, baseada em Abreu (2015), para produzir as Superfícies de Influência, é fundamentada no princípio da superposição de efeitos, teorema de Maxwell, MDF e MEF. É importante frisar que o MEF pode ser substituído por qualquer método que calcule de forma coerente os deslocamentos transversais de uma placa. Uma SI será a deformada da placa analisada devido à aplicação de um conjunto de cargas baseadas nas expressões (4), (5), (6), (7) ou (8), de acordo com o efeito elástico que se deseja estudar, expressas em termos de diferenças finitas, conforme o MDF. Estas cargas, já adequadas, são descritas abaixo:

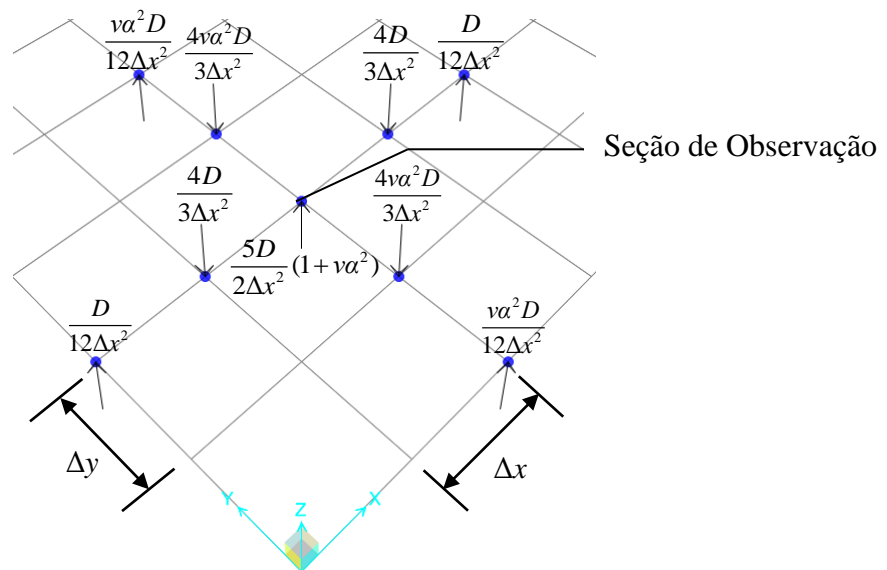


Figura 2 – Combinação de cargas concentradas para produzir a SI dos Momentos Fletores na direção x.

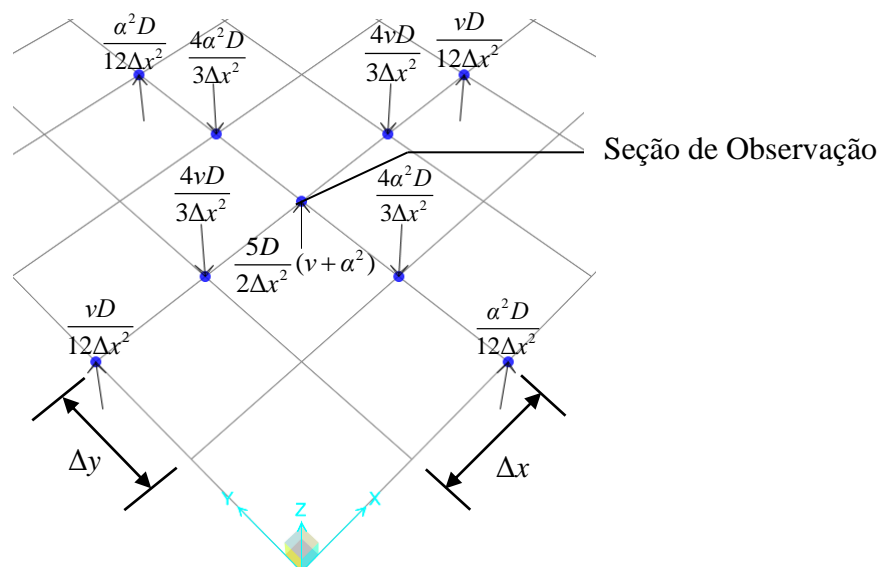


Figura 3 – Combinação de cargas concentradas para produzir a SI dos Momentos Fletores na direção y.

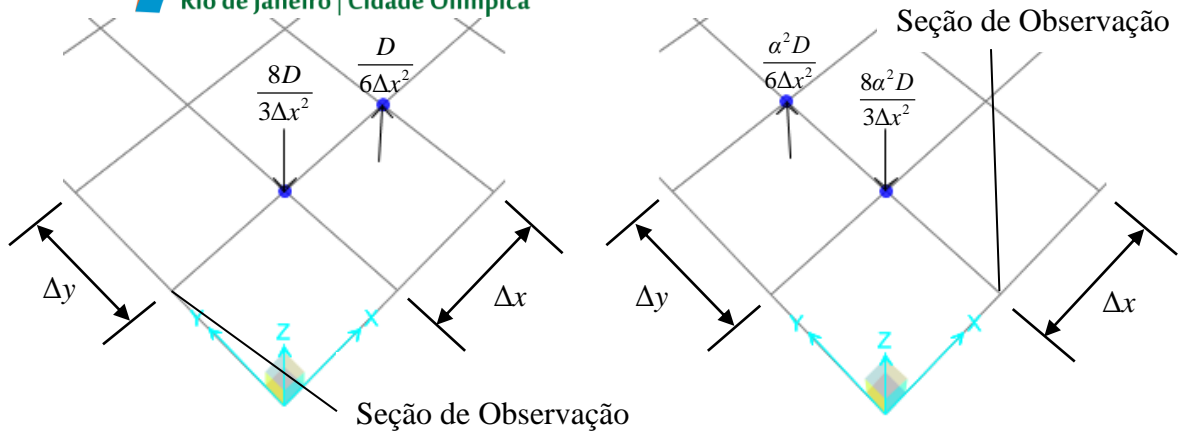


Figura 4 – Combinação de cargas concentradas para produzir a SI dos Momentos de Engastamento Perfeito (à esquerda, para um lado na direção y e à direita, para um lado na direção x).

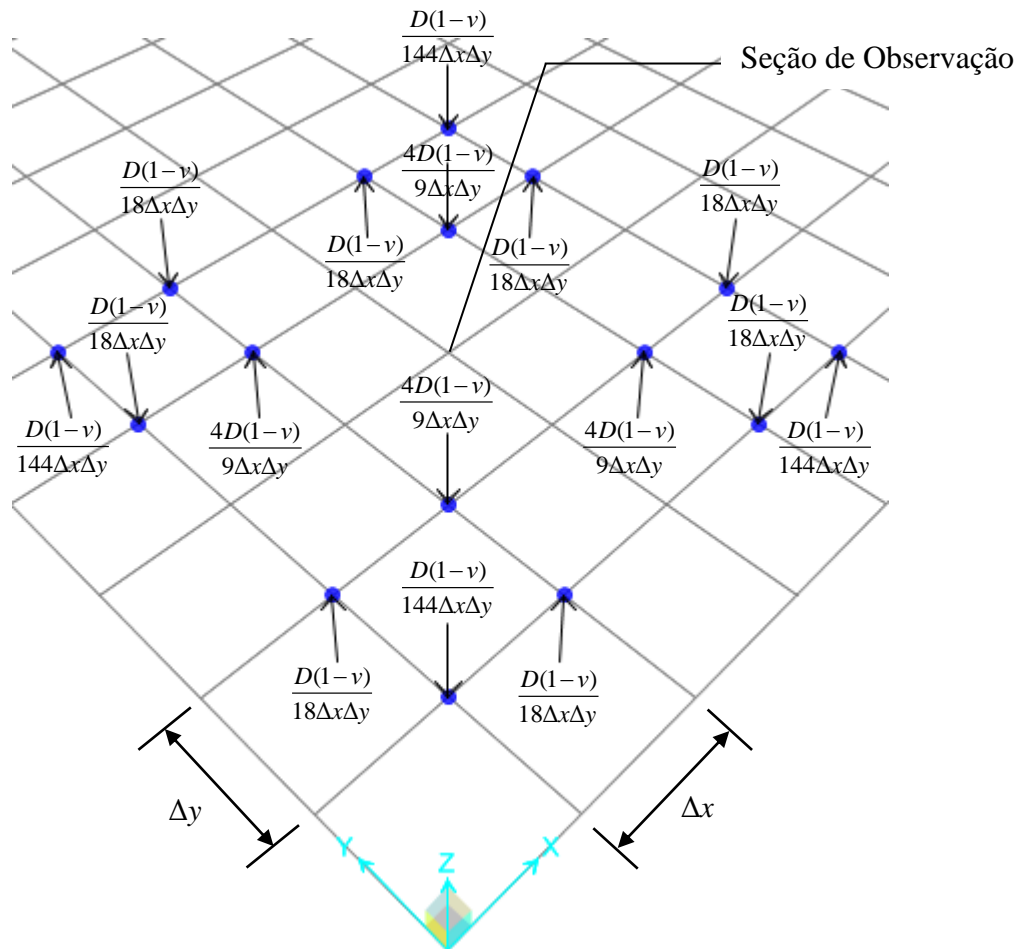


Figura 5 – Combinação de cargas concentradas para produzir a SI dos Momentos Torçores.

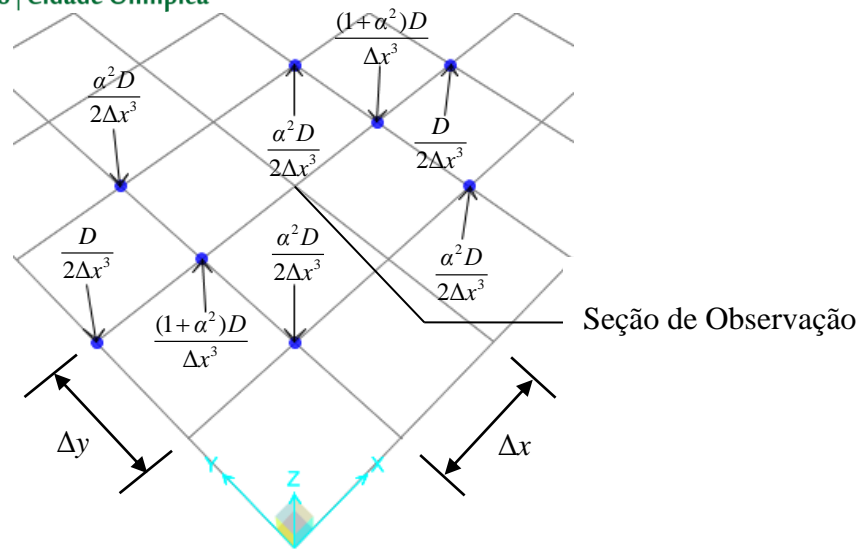


Figura 6 – Combinação de cargas concentradas para produzir a SI dos Esforços Cortantes na direção x.

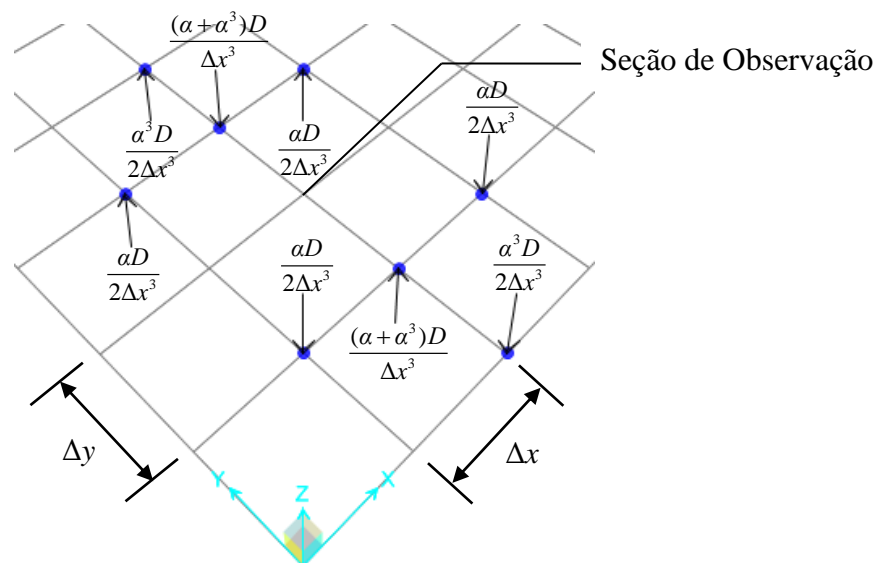


Figura 7 – Combinação de cargas concentradas para produzir a SI dos Esforços Cortantes na direção y.

Nas combinações de cargas apresentados anteriormente, tem-se que:

$$\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (11)$$

As cargas representadas na figura 4, referentes aos momentos de engastamento perfeito têm como base as expressões contidas em (4), (5), (9) e (10). Para evitar que cargas concentradas fossem aplicadas fora do domínio da placa, utiliza-se as condições de contorno do lado em questão, já que a seção de observação está no limite da placa. Esta técnica pode ser empregada em outras combinações de cargas para outros tipos de superfícies de influência.



Para determinar o efeito elástico pesquisado, deve-se utilizar a expressão (1). Isto envolve calcular áreas ou volumes determinados pelas projeções das cargas atuantes na placa. A integração numérica pode ser empregada através da regra do trapézio, as regras de Simpson.

Aplicação em uma Laje de Ponte

O problema, adaptado de Albuquerque (2014, p. 141), consiste em determinar a envoltório dos esforços de uma laje de um tabuleiro de ponte de concreto armado com os três lados simplesmente apoiados e um perfeitamente engastado, conforme a figura 8, adaptada de Ventsel e Krauthammer (2001), considerando o tráfego na direção paralela ao eixo x . Esta possui as dimensões $a = b = 5m$ e $h = 18cm$. Esta laje pertence a uma ponte rodoviária da classe TB-450, cuja espessura da pavimentação vale $e = 8cm$. A carga permanente desta laje, contabilizando o peso próprio, a pavimentação e um possível recapeamento, é igual a $g = 8,42kN / m^2$. Não será considerado a continuidade desta laje com as outras do tabuleiro.

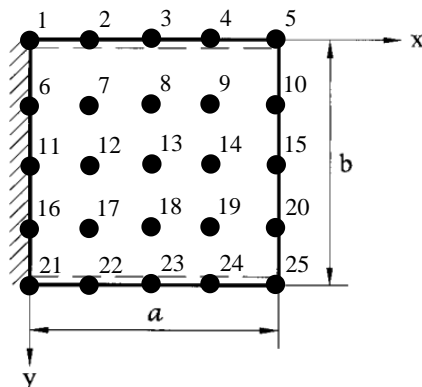


Figura 8 – Laje de ponte a ser analisada com seu devido seccionamento (Ventsel e Krauthammer, 2001 - adaptado).

O coeficiente de Poisson será o indicado na ABNT NBR 6118:2014, ou seja, $\nu = 0,2$. Quanto ao módulo de elasticidade, pode ser utilizado qualquer valor, já que as forças concentradas são diretamente proporcionais a este e os deslocamentos são inversamente proporcionais.

A laje foi seccionada em 25 pontos igualmente espaçados, como indicado na figura 8, sendo cada um destes analisados para calcular a SI desejada, totalizando 25 superfícies de influência para cada esforço, posicionando a combinação de cargas especificadas nas figuras 2 a 7, atentando para a posição destas em relação à seção de observação, aplicadas nos nós da placa.

Para a solução do problema, é necessária uma quantidade muito grande de operações. Por isso automatizou-se os cálculos através do software MATLAB, baseado em Ferreira (2010), empregando o MEF para determinar as deflexões da placa, adotando elementos finitos retangulares de placa ACM, que apresentam 4 nós e 3 graus de liberdade por nó. Cada SI é definida a partir de uma malha com 400 elementos finitos, sendo 20 na direção de cada eixo.

O trem-tipo adotado é o mesmo presente na ABNT NBR 7188:2013. Esta norma apregoa que a distribuição da carga concentrada referente às rodas deve ser distribuída ao longo do eixo do elemento estrutural, por um ângulo de 45° medido da área de contato das rodas. Como as



cargas estão aplicadas no pavimento, é necessário contabilizar a espessura do pavimento para definir esta área. Ainda de acordo com esta norma, os coeficientes de majoração serão: $CIV = 1,35$, $CNF = 1$ e $CIA = 1,25$.

O cálculo dos volumes é feito através de integração numérica da SI utilizando a regra 1/3 de Simpson e a regra do trapézio para diferentes posições do trem-tipo ao longo da placa. A metodologia empregada aqui segue o trabalho de Albuquerque (2014), que considera o trem-tipo com os vértices, centro e rodas posicionados nos pontos de máximo e mínimo da SI. Como as rodas produzem cargas uniformemente distribuídas na laje, será considerado o centro deste carregamento no ponto de máximo ou mínimo.

Os gráficos a seguir representam as envoltórias dos esforços devido às cargas acidentais e os diagramas dos esforços devido às cargas permanentes. Fez-se uma interpolação por splines cúbicas dos 25 pontos calculados para melhor estimar os valores extremos e o formato das envoltórias. Destaca-se que as cores quentes representam os maiores valores dos gráficos.

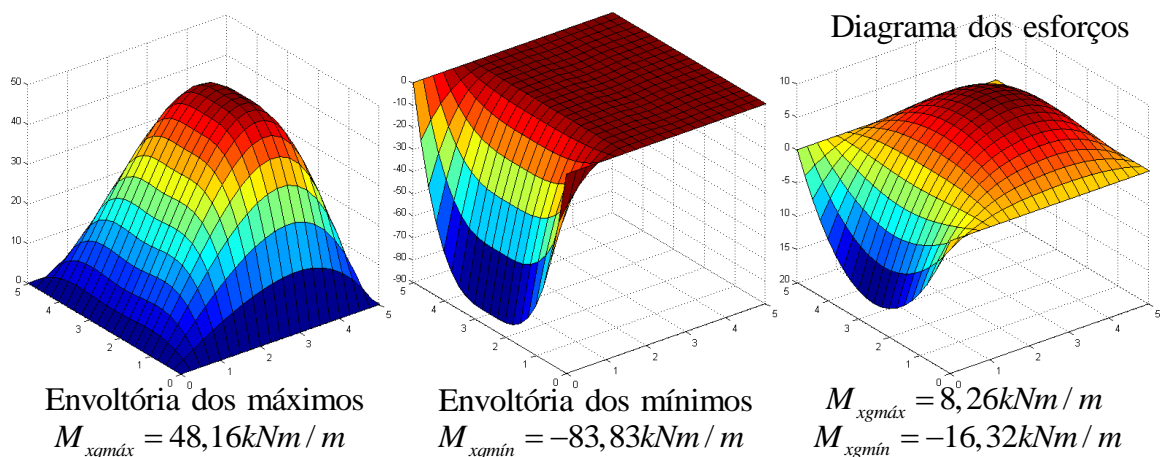


Figura 9 – Envoltórias das Cargas Acidentais e Diagrama da Carga Permanente dos Momentos Fletores na direção x.

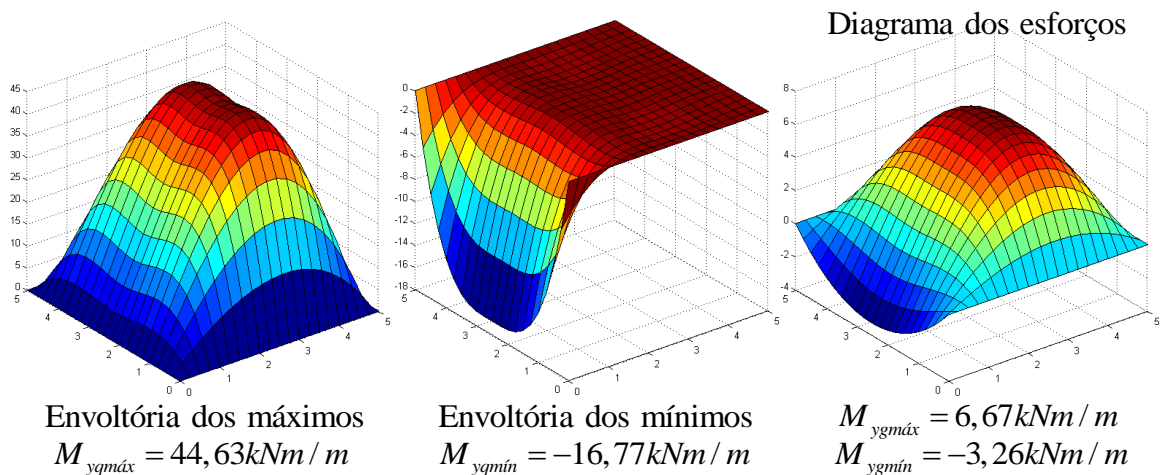
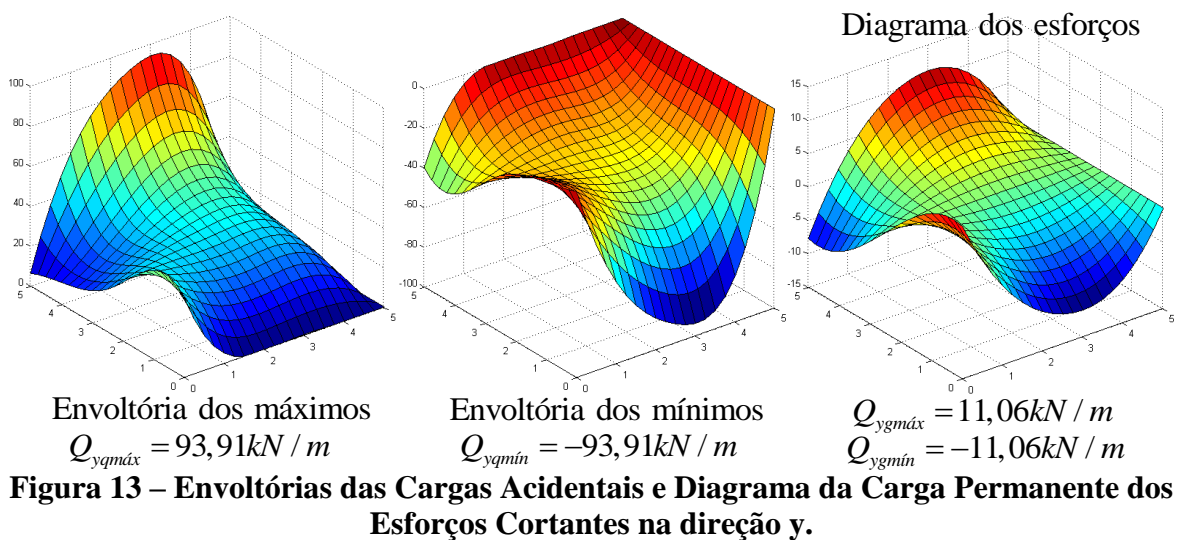
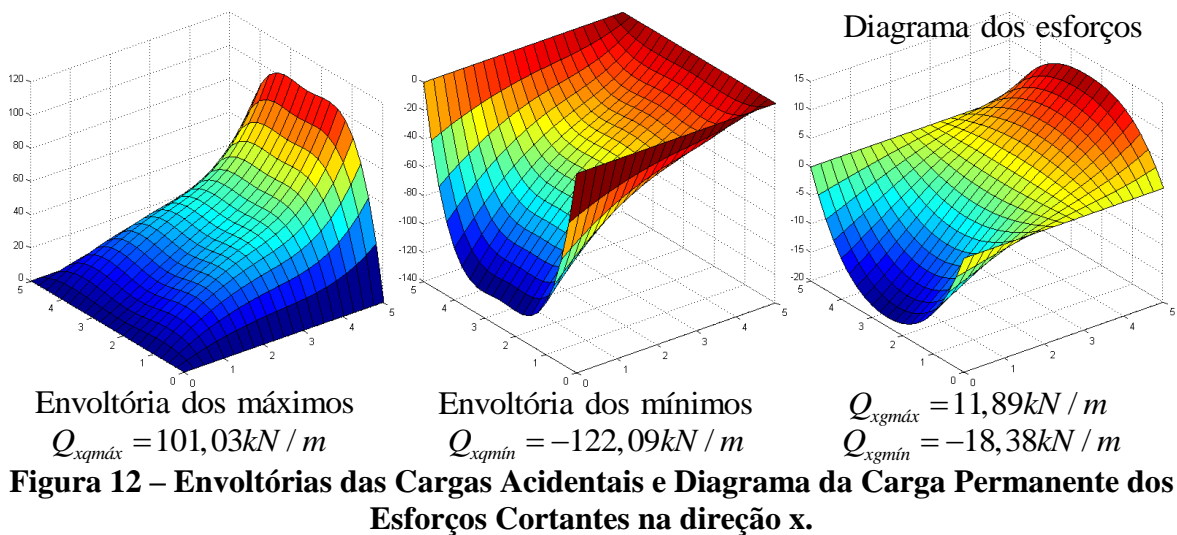
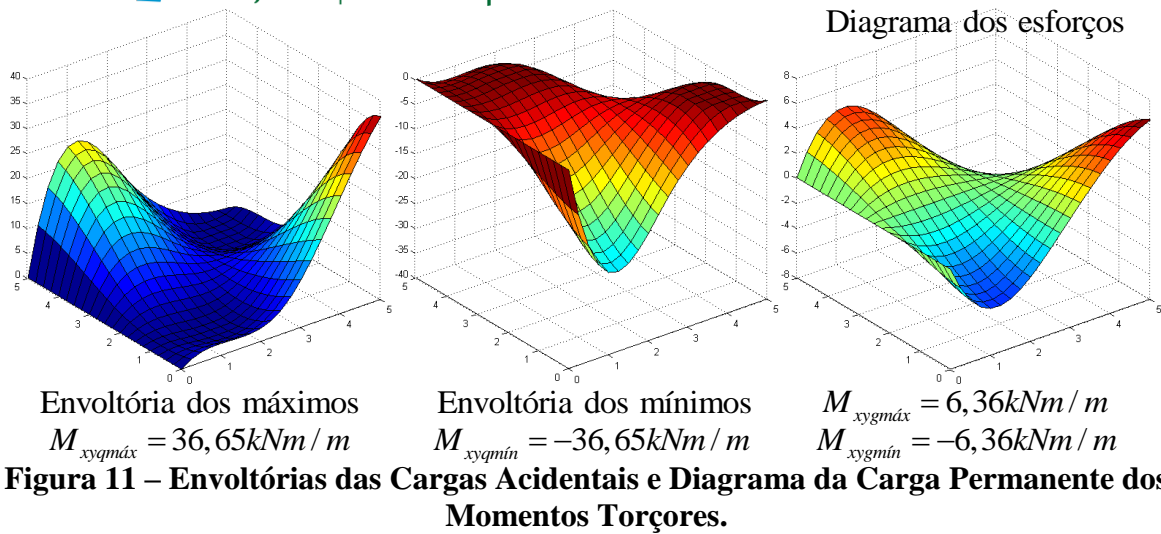


Figura 10 – Envoltórias das Cargas Acidentais e Diagrama da Carga Permanente dos Momentos Fletores na direção y.





Conclusões

Percebe-se que a metodologia apresentada neste trabalho é bastante útil na pesquisa dos máximos e mínimos esforços produzidos em placas devido a atuação de cargas móveis. Além disso, com esta metodologia foi possível produzir os diagramas de esforços nos pontos especificados da placa produzidos por cargas permanentes, através do cálculo de toda o volume da SI, já que este carregamento atua em toda a extensão da placa, sendo uma alternativa ao cálculo clássico destes esforços.

O interessante desta metodologia é a possibilidade da aplicação na análise de tabuleiros completos de pontes, não sendo necessário a discretização de cada laje, analisando as lajes de forma isolada e depois fazer considerações devido a continuidade com as outras lajes. Além disso o método permite determinar o máximo e mínimo esforço da laje com maior precisão que as tabelas presentes na bibliografia, já que estes esforços não são necessariamente extremos no centro da laje, dado que é comumente tabelado. Contudo é inviável realizar os cálculos manualmente, devido ao grande volume de operações, sendo interessante automatizar o processo em algum software específico.

Referências

- ABREU, Rafael Otávio Alves. Contribuição ao estudo das superfícies de influência para placas finas através do método dos elementos finitos. São Luís, 2015. 169f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Estadual do Maranhão, 2015.
- ALBUQUERQUE, Arthur Álex de Araújo. Implementação de Elementos Finitos de Barra e Placa para a Análise de Esforços em Tabuleiros de Pontes por Meio de Superfícies de Influência. 2014. 248f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.
- ARAÚJO, José Milton de. Curso de concreto armado. 4. ed. Rio Grande: Dunas, v.2, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7188: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 2013.
- CUNHA, Albino Joaquim Pimenta da; SOUZA, Vicente Custódio Moreira de. Lajes em Concreto Armado e Protendido. 2. ed., Niterói: EDUFF; Rio de Janeiro: Ed. UERJ, 1998.
- FERREIRA, A. J. M.. Problemas de Elementos Finitos em MATLAB. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.
- FORNBERG, Bengt. Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids. *Mathematics of Computation*, v. 51, n.184, out 1988. Disponível em: <<http://www.ams.org/journals/mcom/1988-51-184/S0025-5718-1988-0935077-0/S0025-5718-1988-0935077-0.pdf>>. Acesso em: 19 set. 2015.
- MARTHA, Luiz Fernando. Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- MASON, Jayme. Pontes em Concreto Armado e Protendido. Rio de Janeiro: LTC, 1977.
- PUCHER, Adolf. Einflußfelder Elastischer Platten. 5. ed. New York: Springer-Verlag Wien, 1977.
- SZILARD, Rudolph. Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.
- VENTSEL, Eduard; KRAUTHAMMER, Theodor. Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications. New York: Marcel Dekker, 2001.