



IX CONGRESSO BRASILEIRO DE PONTES E ESTRUTURAS  
18 a 20 de maio, 2016 - Everest Rio Hotel

## **Análise Comparativa dos Métodos do Pilar-padrão com Curvatura Aproximada e com Rigidez “k” Aproximada para o Dimensionamento de Pilares de Concreto Armado sob Flexão Oblíqua**

**Guilherme Afonso Ferreira da Silva<sup>1</sup>, Gleicilene Bione Santos<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Centro Universitário do Vale do Ipojuca – UNIFAVIP – DeVry Brasil / Departamento de Engenharia Civil / guilherme\_afonso15@hotmail.com

<sup>2</sup>Centro Universitário do Vale do Ipojuca – UNIFAVIP – DeVry Brasil / Departamento de Engenharia Civil / gleicilenebs@gmail.com

### **Resumo**

Este trabalho apresenta um estudo sobre pilares de concreto armado com três exemplos diferentes submetidos à flexão oblíqua, onde é feito o dimensionamento por dois métodos distintos, considerando-se a ABNT NBR 6118:2014. Nesta pesquisa, foram abordados o método do pilar-padrão com curvatura aproximada e o método do pilar-padrão com rigidez “k” aproximada para a determinação dos momentos totais de cálculo nos pilares, considerando-se concreto com resistência característica à compressão de 30 MPa, aço CA-50 e dois valores diferentes adotados para carga normal. Esses métodos são aproximados e permitidos apenas para o cálculo de pilares curtos ou moderadamente esbeltos. Para todos os casos em que os pilares foram classificados em ao menos uma das direções como moderadamente esbeltos, foi possível verificar que o momento calculado pelo método da curvatura aproximada foi superior ao calculado pelo método da rigidez “k” aproximada na direção considerada. Nos casos em que os pilares foram classificados como curtos nas duas ou em uma das direções, o momento calculado pelo método da rigidez “k” aproximada foi superior ao calculado pelo método da curvatura aproximada na direção analisada, entretanto, os valores encontrados foram inferiores ao valor “ $M_{1d,A}$ ” que deve ser adotado nesses casos, sendo “ $M_{1d,A}$ ” o maior dos valores entre o momento mínimo e o momento de cálculo no topo e na base do pilar. Classificou-se o método do pilar-padrão com curvatura aproximada como sendo o mais rigoroso entre os dois métodos adotados, uma vez que por ele foram determinados valores de momentos maiores para os exemplos de pilares dimensionados neste trabalho.

### **Palavras-chave**

Pilares de concreto armado; flexão oblíqua; método do pilar-padrão com curvatura aproximada; método do pilar-padrão com rigidez “k” aproximada.

### **Introdução**

A ABNT NBR 6118:2014 estabelece diversas considerações a respeito do dimensionamento de pilares de concreto armado, bem como dos outros elementos estruturais. Para o cálculo do momento fletor total nos pilares, são apresentados alguns métodos de dimensionamento com suas características e condições de aplicação.

Embora os métodos aproximados tenham os resultados permitidos pela ABNT NBR 6118:2014 para o cálculo da armadura, pode-se haver uma alteração significativa no momento



total obtido em relação ao procedimento adotado. Esta diferença deve proporcionar também uma taxa de armadura maior para o mesmo pilar se calculada por um método, e menor se calculada por outro.

Esta pesquisa faz uma relação entre dois métodos para alguns exemplos de pilares submetidos à flexão oblíqua, apresentando uma comparação acerca dos resultados, a fim de verificar se algum método apresenta maior rigor em relação ao outro.

## Metodologia

Os concretos aos quais a ABNT NBR 6118:2014 se aplica são os compreendidos nas classes de resistência dos grupos I e II definidos na ABNT NBR 8953:2015, até a classe C90. A letra “C” designa os concretos normais dentro dos grupos de resistência, e o número subsequente indica a resistência característica à compressão, “ $f_{ck}$ ”, expressa em MPa, aos 28 dias (ARAÚJO, 2014).

O aço de armadura passiva utilizado nos projetos de estruturas deve ser classificado pela ABNT NBR 7480:2007, nas categorias CA-25, CA-50 e CA-60, as quais apresentam o valor característico de resistência ao escoamento, “ $f_{yk}$ ”, de 250, 500 e 600 MPa, respectivamente.

Uma estrutura pode ser admitida como segura, adotando-se geralmente valores de solicitações de cálculo no máximo iguais aos que ela pode suportar, podendo-se minorar as resistências e majorar as ações através do uso de coeficientes de ponderação (CARVALHO; FILHO, 2014). Pilar é um elemento estrutural, geralmente vertical, que recebe ações predominantemente de compressão oriundas das vigas ou lajes e as conduzem para as fundações. Ele pode estar submetido à compressão composta normal ou oblíqua (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

A ABNT NBR 6118:2014 classifica os pilares quanto às suas solicitações iniciais como pilares internos, quando não apresenta nenhuma borda livre, de borda, quando apresenta uma de suas bordas livres, e de canto, quando apresenta duas bordas livres. Eles também podem ser classificados quanto ao seu índice de esbeltez “ $\lambda$ ” conforme tabela 1.

**Tabela 1 – Classificação dos pilares quanto ao seu índice de esbeltez**

Condição	Classificação do pilar
$\lambda \leq \lambda_1$	Curto
$\lambda_1 < \lambda \leq 90$	Moderadamente esbelto
$90 < \lambda \leq 140$	Esbelto
$140 < \lambda \leq 200$	Excessivamente esbelto

O índice de esbeltez pode ser determinado, para pilares de seção quadrada ou retangular, pela equação 1, enquanto que “ $\lambda_1$ ” concerne a um valor limite para índice de esbeltez, estabelecido na ABNT NBR 6118:2014 pela equação 2.

$$\lambda = \frac{l_e \sqrt{12}}{h} \quad (1)$$

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \cdot e_1/h}{\alpha_b} \quad (2)$$

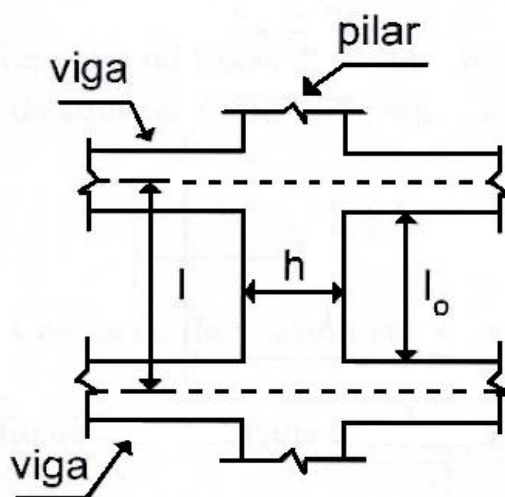


A variável “ $l_e$ ” é o comprimento equivalente do pilar, “ $h$ ” é a altura da seção do pilar na direção analisada, “ $e_i$ ” refere-se à excentricidade de primeira ordem, e o coeficiente “ $\alpha_b$ ” é um parâmetro de instabilidade que varia em função das condições de vinculação e momento fletor ao longo do pilar.

Pilares biapoiados têm os seus comprimentos equivalentes para as direções “x” e “y” principais, dados pelo maior dos valores entre as equações 3 e 4. Nestas, “ $l_0$ ” é a distância entre as faces internas das vigas e “ $l$ ” a distância entre os eixos das vigas, conforme pode ser observado na figura 1.

$$l_e = l_0 + h \quad (3)$$

$$l_e = l \quad (4)$$



**Figura 1 – Esquema para o cálculo do comprimento equivalente dos pilares (Fonte: adaptado de ARAÚJO, 2014).**

As excentricidades iniciais podem ser calculadas, conforme CARVALHO e PINHEIRO (2009), pela equação 5.

$$e_i = \frac{M}{N} \quad (5)$$

O valor de “N” refere-se à carga normal no pilar e “M” é o momento fletor no tramo superior ou no tramo inferior do pilar, podendo ser determinado de maneira aproximada, segundo SCADELAI (2004), por meio das equações 6 e 7, respectivamente. Nestas, “ $M_{eng}$ ” é o momento de engastamento perfeito da viga com os pilares determinado conforme SÜSSEKIND (1980) pela equação 8, com “ $p$ ” sendo o carregamento total na viga e “ $l$ ” o seu comprimento.

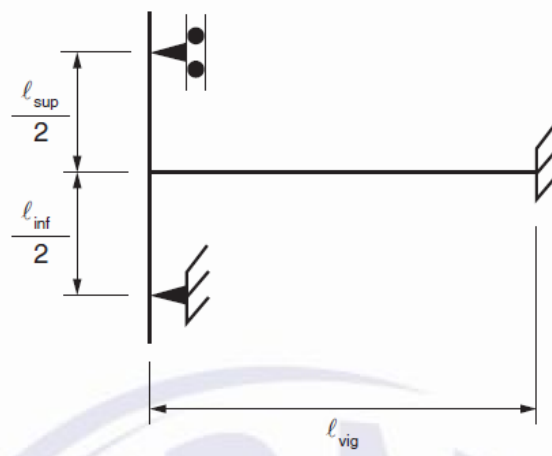
$$M_{sup} = M_{eng} \cdot \frac{3r_{sup}}{4r_{vig} + 3r_{inf} + 3r_{sup}} \quad (6)$$



$$M_{inf} = M_{eng} \cdot \frac{3r_{inf}}{4r_{vig} + 3r_{inf} + 3r_{sup}} \quad (7)$$

$$M_{eng} = \frac{pl^2}{12} \quad (8)$$

O valor de “ $r$ ” é a rigidez do elemento no nó considerado, dada segundo a ABNT NBR 6118:2014 como o quociente da inércia da seção pelo comprimento equivalente do pilar e avaliada conforme figura 2.



**Figura 2 – Aproximação em apoios extremos (Fonte: ABNT NBR 6118:2014).**

Nesta pesquisa, há duas situações para o valor “ $\alpha_b$ ”. Na primeira situação o pilar é considerado biapoiado sem cargas transversais, devendo segundo a ABNT NBR 6118:2014, ser adotado o valor resultante do intervalo apresentado na equação 9. A segunda situação se dá com o pilar considerado biapoiado, mas com momento fletor menor que o momento mínimo, devendo ser adotado o valor da equação 10.

$$0,4 \leq 0,60 + 0,40 \frac{M_B}{M_A} \leq 1 \quad (9)$$

$$\alpha_b = 1 \quad (10)$$

As variáveis “ $M_A$ ” e “ $M_B$ ” são os momentos de primeira ordem nos extremos do pilar, devendo ser adotado para “ $M_A$ ” o maior valor absoluto ao longo do pilar biapoiado e para “ $M_B$ ” o sinal positivo, se tracionar a mesma face que “ $M_A$ ”, e negativo, em caso contrário. Segundo a ABNT NBR 6118:2014, o momento de primeira ordem acrescido dos efeitos das imperfeições locais, deve respeitar o valor mínimo indicado pela equação 11, sendo “ $N_d$ ” a força normal de cálculo no pilar e “ $h$ ” a altura total, em metros, da seção transversal na direção considerada.

$$M_{1d,min} = N_d (0,015 + 0,03h) \quad (11)$$



Para o dimensionamento de pilares, a ABNT NBR 6118:2014 apresenta o método geral, que é obrigatório para pilares com índice de esbeltez superiores a 140 e alguns métodos aproximados, como o do pilar-padrão com curvatura aproximada, pilar-padrão com rigidez “k” aproximada, pilar-padrão acoplado a diagramas M, N e 1/r e o método do pilar-padrão para pilares de seções transversais retangulares submetidos à flexão composta oblíqua.

Os métodos aproximados só podem ser usados para pilares curtos ou moderadamente esbeltos, ou seja, quando o seu índice de esbeltez é menor ou igual a 90, mas geralmente, a maioria dos pilares dos edifícios são classificados como curtos ou moderadamente esbeltos, sendo poucos os casos, segundo ARAÚJO (2014), em que eles devem ser tratados como pilares esbeltos.

Neste trabalho foram abordados os métodos do pilar-padrão com curvatura aproximada e o do pilar-padrão com rigidez “k” aproximada.

### Método do Pilar-padrão com Curvatura Aproximada

Este método, conforme ABNT NBR 6118:2014, só pode ser empregado no cálculo de pilares que apresentem “ $\lambda \leq 90$ ”, seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo.

A não linearidade geométrica é considerada pela ABNT NBR 6118:2014 de forma aproximada, supondo uma deformação senoidal na barra, ao passo que a não linearidade física é considerada por uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica.

O cálculo do momento máximo no pilar é expresso, segundo a ABNT NBR 6118:2014 e adaptado por SCADELAI (2004), conforme equação 12.

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d e_2 \geq M_{1d,A} \quad (12)$$

Tem-se que “ $M_{1d,A}$ ” é o maior dos valores entre o momento fletor de cálculo no topo e na base do pilar e o momento fletor mínimo indicado na equação 11, enquanto que “ $e_2$ ” é a excentricidade de segunda ordem dada pela equação 13.

$$e_2 = \frac{l_e^2}{10} \frac{1}{r} \quad (13)$$

O valor de “ $l_e$ ” refere-se ao comprimento equivalente do pilar na direção analisada e “ $1/r$ ” é a curvatura na seção crítica, que pode ser avaliada aproximadamente segundo a ABNT NBR 6118:2014 pela expressão 14.

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(\nu + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad (14)$$

Tem-se que “h” é a altura da seção na direção considerada e “ $\nu$ ” é a força normal adimensional dada pela equação 15, na qual “ $A_c$ ” é a área de concreto da seção e “ $f_{cd}$ ” é a resistência à compressão de cálculo do concreto.

$$\nu = N_d / (A_c f_{cd}) \quad (15)$$



## Método do Pilar-padrão com Rigidez “k” Aproximada

As condições e considerações para o emprego deste método são similares às descritas no método da curvatura aproximada, sendo que a não linearidade física deve ser considerada por uma expressão aproximada da rigidez (ABNT NBR 6118:2014).

O momento total máximo no pilar pode ser calculado por meio da equação 16, com os valores de “a, b e c” indicados nas equações 17, 18 e 19, respectivamente.

$$M_{Sd,tot} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (16)$$

$$a = 5 \cdot h \quad (17)$$

$$b = h^2 \cdot N_d - \frac{N_d l_e^2}{320} - 5 \cdot h \cdot \alpha_b \cdot M_{1d,A} \quad (18)$$

$$c = -N_d h^2 \alpha_b M_{1d,A} \quad (19)$$

As variáveis “h, N<sub>d</sub>, l<sub>e</sub>, α<sub>b</sub> e M<sub>1d,A</sub>” são as mesmas já definidas para o método do pilar-padrão com curvatura aproximada.

## Exemplos Dimensionados

Foram analisados três pilares distintos submetidos à flexão oblíqua com suas seções transversais de acordo com a figura 3. Para todos os exemplos, o concreto adotado no dimensionamento foi o C30 e o aço CA-50. Os pilares também foram considerados biapoiados sem cargas transversais significativas ao longo do seu comprimento.

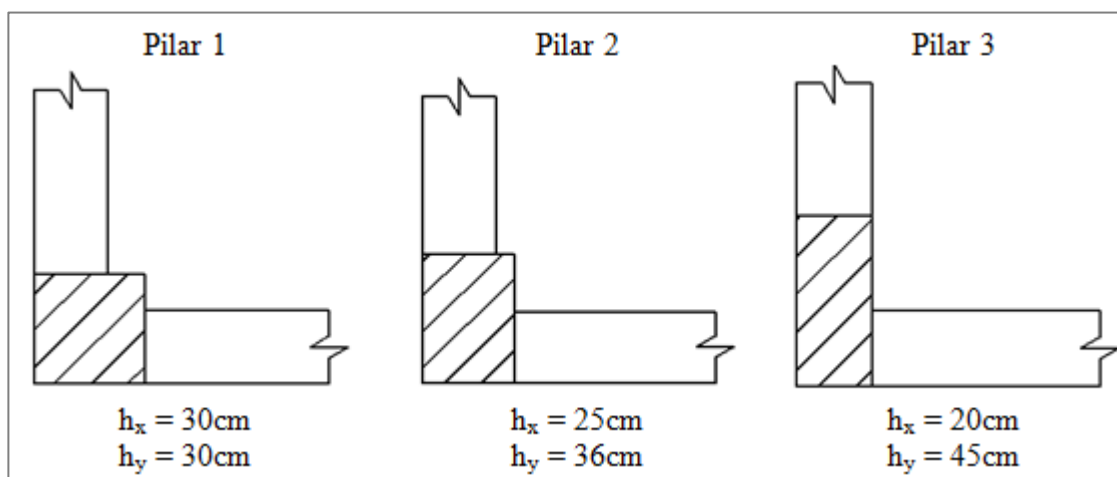


Figura 3 – Seções transversais dos pilares dimensionados.

Os comprimentos equivalentes “l<sub>e</sub>” adotados para os pilares nas direções “x” e “y”, assim como os momentos característicos “M<sub>k</sub>” no topo e na base dos pilares para as duas direções, estão indicados na tabela 2.



**Tabela 2 – Comprimentos equivalentes e momentos fletores no topo e na base.**

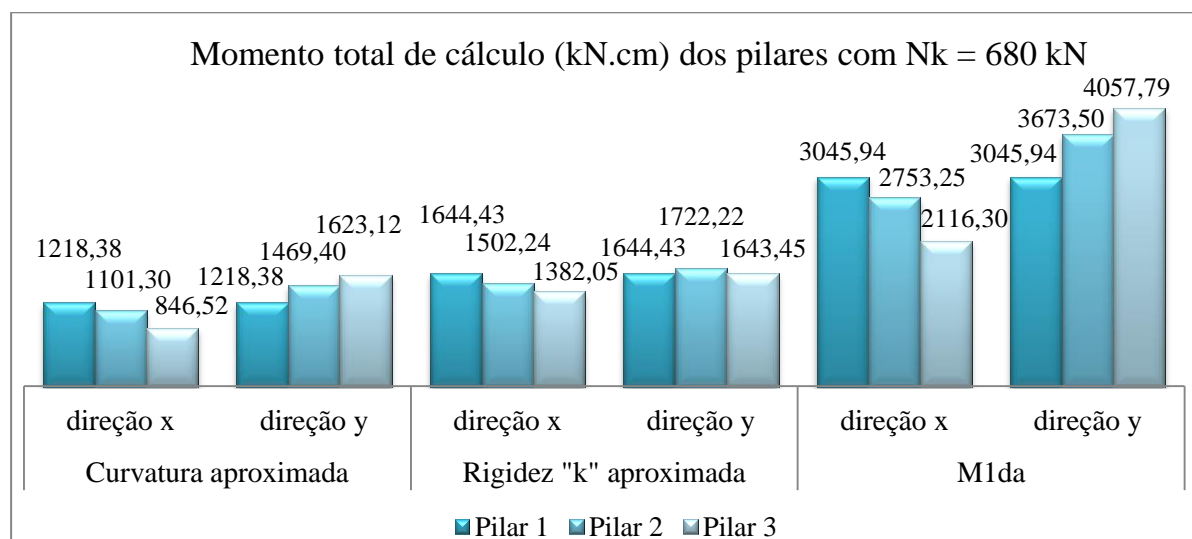
Pilar 1	Pilar 2	Pilar 3
$l_{ex} = 310 \text{ cm}$	$l_{ex} = 265 \text{ cm}$	$l_{ex} = 260 \text{ cm}$
$l_{ey} = 310 \text{ cm}$	$l_{ey} = 276 \text{ cm}$	$l_{ey} = 285 \text{ cm}$
$M_{kx} = 2175,67 \text{ kN.cm}$	$M_{kx} = 1966,61 \text{ kN.cm}$	$M_{kx} = 1511,64 \text{ kN.cm}$
$M_{ky} = 2175,67 \text{ kN.cm}$	$M_{ky} = 2623,93 \text{ kN.cm}$	$M_{ky} = 2898,42 \text{ kN.cm}$

Finalmente, estando definidas as particularidades dos três exemplos, foram consideradas duas situações para carga normal característica, sendo uma com o cálculo do momento total adotando “ $N_k = 680 \text{ kN}$ ” e a outra adotando “ $N_k = 990 \text{ kN}$ ”.

### Resultados e Conclusões

Na primeira situação de cálculo, com “ $N_k = 680 \text{ kN}$ ”, todos os pilares tiveram o momento fletor mínimo inferior ao momento de cálculo no topo e na base para as duas direções, resultando “ $\alpha_b = 0,4$ ”. Obteve-se um índice de esbelteza sempre inferior ao valor de referência “ $\lambda_1$ ” com consequente classificação dos pilares como curtos, tornando possível desconsiderar a excentricidade de segunda ordem.

Analisando cada pilar em uma direção específica, o momento total pelo método do pilar-padrão com rigidez “ $k$ ” aproximada apresentou-se maior em relação ao método do pilar-padrão com curvatura aproximada, conforme figura 4. Por exemplo, considerando o pilar 2 na direção “ $x$ ”, o momento total de cálculo foi de  $1101,30 \text{ kN.cm}$  pelo método da curvatura aproximada e  $1502,24 \text{ kN.cm}$  pelo da rigidez “ $k$ ” aproximada. Já na direção “ $y$ ”, o pilar 2 apresentou um momento igual a  $1469,40 \text{ kN.cm}$  pelo método da curvatura aproximada e  $1722,22 \text{ kN.cm}$  pelo da rigidez “ $k$ ” aproximada.



**Figura 4 – Comparação entre os momentos totais em função do método de dimensionamento utilizado quando  $N_k = 680 \text{ kN}$ .**

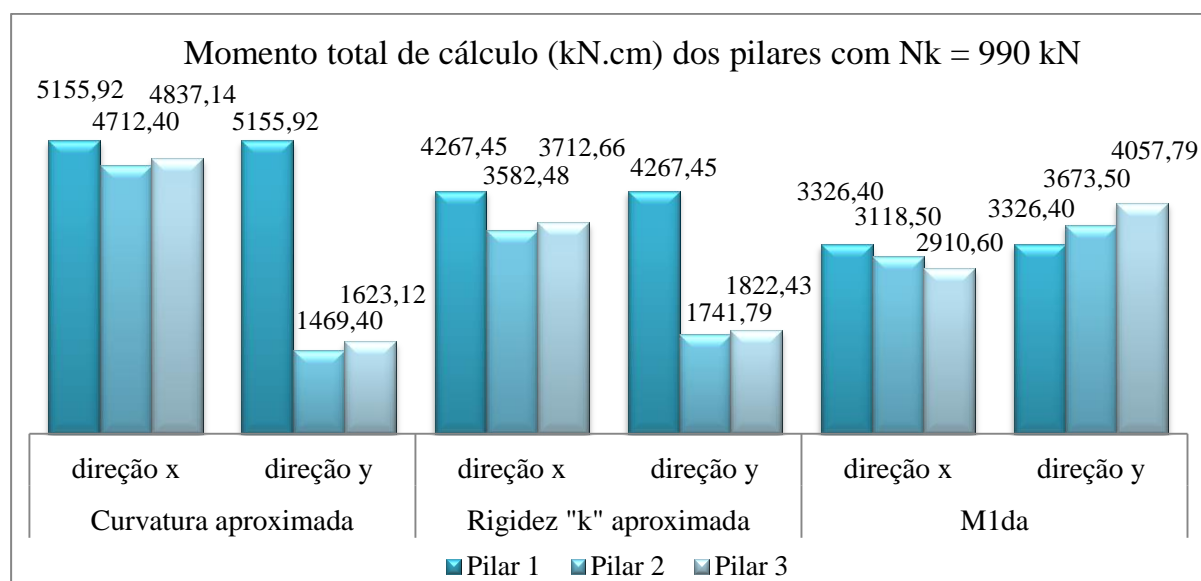
Entretanto, na primeira situação de cálculo, esta superioridade dos momentos totais pelo método da rigidez “ $k$ ” aproximada não teve relevância, pois o valor “ $M_{1da}$ ” prevaleceu para



todos os pilares nas duas direções. Sendo assim, independente do método utilizado, o valor de momento total de cálculo a ser adotado na determinação da área de aço seria igual a " $M_{1d,a}$ ", já que a ABNT NBR 6118:2014 indica que deve usado o maior valor entre ele e o obtido por qualquer um dos métodos.

Na segunda situação de cálculo, com " $N_k = 990$  kN", o pilar 1 teve um momento fletor mínimo superior ao momento de cálculo no topo e na base do pilar, resultando " $\alpha_b = 1$ " nas duas direções. Este pilar teve um índice de esbeltez superior a " $\lambda_l$ " e inferior a 90, sendo classificado como moderadamente esbelto nas duas direções, devendo-se, portanto, considerar a excentricidade de segunda ordem. Os pilares 2 e 3 resultaram em um coeficiente " $\alpha_{bx} = 1$ " e " $\alpha_{by} = 0,4$ ". Estes dois pilares foram classificados como moderadamente esbeltos na direção "x", devendo-se levar em conta " $e_2$ ", e curtos na direção "y", com " $e_2$ " podendo ser desprezada.

Nesta segunda situação, pode-se inicialmente verificar, por meio da figura 5, que o momento total determinado pelos métodos foi desta vez superior a " $M_{1d,a}$ " na direção em que o pilar foi classificado como moderadamente esbelto, ou seja, nas direções "x" e "y" do pilar 1 e na direção "x" dos pilares 2 e 3. Neste caso, os momentos totais calculados devem ser utilizados no cálculo da armadura pelo fato de serem maiores que " $M_{1d,a}$ ".



**Figura 5 – Comparação entre os momentos totais em função do método de dimensionamento utilizado quando  $N_k = 990$  kN.**

Nota-se que em todos os exemplos onde o pilar é moderadamente esbelto em determinada direção, o momento total calculado pelo método da curvatura aproximada foi consideravelmente superior ao calculado pelo método da rigidez "k" aproximada.

Nos casos em que o pilar foi classificado como curto, ou seja, na direção "y" dos pilares 2 e 3, houve novamente uma pequena superioridade do momento determinado pelo método da rigidez "k" aproximada, porém não sendo relevante, porque o momento a ser utilizado no cálculo da armadura é " $M_{1d,a}$ " pelo fato de ser necessário adotar o maior entre os dois valores. Com esta pesquisa foi possível concluir que, dos três pilares diferentes em duas situações de carregamento distintas, quando o pilar submetido à flexão oblíqua foi classificado como curto





em determinada direção, os dois métodos abordados para o cálculo do momento total não influenciaram no resultado, sendo atribuído para o momento total de cálculo, o valor “ $M_{1d,a}$ ” pelo fato deste ser o maior. Nos casos em que o pilar foi classificado como moderadamente esbelto, o método do pilar-padrão com curvatura aproximada apresentou sempre um valor para o momento total de cálculo consideravelmente superior ao determinado pelo método do pilar-padrão com rigidez “k” aproximada. Embora ambos sejam métodos aproximados permitidos pela ABNT NBR 6118:2014, possibilitou-se classificar o método do pilar-padrão com curvatura aproximada como mais rigoroso que o método do pilar-padrão com rigidez “k” aproximada.

### Referências

- ARAÚJO, José Milton de. Curso de Concreto Armado. 4. ed. v 1 e 4. Rio Grande: DUNAS, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7480: Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado - Especificação. Rio de Janeiro, 2007.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8953: Concreto para fins estruturais - Classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência. Rio de Janeiro, 2015.
- CARVALHO, Roberto Chust; FILHO, Jasson Rodrigues de Figueiredo. Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado Segundo a NBR 6118:2014. 4. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2014.
- CARVALHO, Roberto Chust; PINHEIRO, Libânio Miranda. Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado. 1. ed. v. 2. São Paulo: PINI, 2009.
- SCADELAI, Murilo Alessandro. Dimensionamento de pilares de acordo com a NBR 6118:2003. 136f. Dissertação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- SÜSSEKIND, José Carlos. Curso de análise estrutural. 4. Ed. v. 2. Porto Alegre: Globo, 1980.