



IX CONGRESSO BRASILEIRO DE PONTES E ESTRUTURAS  
18 a 20 de maio, 2016 - Everest Rio Hotel

## **Verificação do Estado limite de Deformação Excessiva para Vigas de Concreto Armado Submetidas à Ação Térmica**

**Túlio Raunyr Cândido Felipe<sup>1</sup>, Camila Maria Lira de Souza<sup>2</sup>, Mário Cesar Soares Xavier<sup>3</sup>, Kaliel Gomes Andrade<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Escola de Engenharia de São Carlos / Universidade de São Paulo /Departamento de Engenharia de Estruturas / [tulio-raunyr@usp.br](mailto:tulio-raunyr@usp.br)

<sup>2,3</sup> Universidade Estadual da Paraíba/Departamento de Engenharia Civil / [camilaupe@gmail.com](mailto:camilaupe@gmail.com)/[cesar@ccts.uepb.edu.br](mailto:cesar@ccts.uepb.edu.br)

<sup>4</sup>Centro Universitário de João Pessoa/ Departamento de Engenharia Civil/ [kaliel.gomes@hotmail.com](mailto:kaliel.gomes@hotmail.com)

### **Resumo**

Quando um engenheiro estrutural for projetar uma estrutura de concreto armado, o mesmo deve fazer as verificações de estado limite último e estado limite de serviço, descritos na ABNT NBR 6118:2014 em vista a proporcionar, respectivamente, segurança e durabilidade a estrutura durante a sua vida útil. Neste caso, a importância de estudar os elementos estruturais quando estão submetidos à ação térmica, visto que, esta ação em muitos casos não é levada em consideração no dimensionamento dos projetos estruturais, ocorrendo que os projetistas coloquem juntas de dilatações para atenuar os efeitos, contudo, para uma variação brusca de temperatura a probabilidade de ocorrência de danos a estrutura. Assim, para comprovar a importância da verificação do efeito térmico em vigas de concreto armado, este trabalho tem como objetivo, utilizar o Método Energético e as equações diferenciais para determinar os deslocamentos no caso em que a estrutura esteja submetida a uma variação de temperatura. Assim, foi possível encontrar a equação da linha elástica levando em consideração a influência da temperatura e os carregamentos atuantes na estrutura. Os deslocamentos verticais foram determinados partindo do Método de Rayleigh-Ritz, que consiste na minimização da energia potencial total do sistema (Princípio da Mínima Energia ou Condição de Estacionariedade), reduzindo o problema variacional a um sistema de equações algébricas, ou seja, substituindo o modelo contínuo por um modelo discreto com um número finito de graus de liberdade (discretização do problema). Este método foi implementado em uma rotina no software comercial Wolfram Mathematica. Por fim, foram comparados os resultados das flechas totais com a flecha limite admissível prescrita na Tabela 13.2 da ABNT NBR 6118:2014 em vista de determinar uma temperatura crítica, na qual, a flecha total ultrapasse a flecha limite admissível.

### **Palavras-chave**

Método energético; ação térmica; concreto armado.

### **Introdução**

Para alguns casos de problemas da engenharia civil, ao se tratar do comportamento linear de estruturas utiliza-se formulações da forma forte e fraca do Problema de Valor de Contorno para solucionar problemas. Onde a forma fraca busca uma solução aproximada e é a mais comumente usada.



O Problema de Valor de Contorno envolve as condições de equilíbrio, compatibilidade e as leis constitutivas que possuem o número de constante elástica do material variando de acordo com o grau de anisotropia apresentado pelo meio. Para o caso geral a matriz constitutiva é ainda simétrica e apresenta vinte e uma constantes elásticas provocando assim tanto deformações lineares quanto distorções angulares.

Pode-se dizer que a forma forte busca que a função atenda a todos os pontos da equação diferencial, exigindo uma maior satisfação das condições de contorno assim como da função solução. Enquanto a forma fraca permite que se utilize uma função aproximativa para a solução do problema exigindo apenas que as condições de contorno sejam satisfeitas, apresentando vantagens sobre a forma forte pois nem sempre é possível a sua determinação analítica (PROENÇA, 2010).

### Forma Fraca pelo Método da Energia

Nesta seção será realizada uma sucinta revisão teórica sobre a obtenção da Forma Fraca pelo Método da Energia. Esta revisão será importante para introduzir os conceitos fundamentais que serão aplicados para formular o problema em estudo. Maiores detalhes sobre este tópico os autores recomendam os trabalhos de PACCOLA (2015), PROENÇA (2010), SORIANO (2003) e SAVASSI (2000).

Com aplicação dos princípios variacionais a forma fraca pode ser obtida pelo método da energia onde considerando um sistema conservativo composto por uma estrutura ou sólido deformável e forças aplicadas, pode-se encontrar a Energia Potencial Total do sistema. Esta é dividida em energia potencial das forças externas aplicadas e outra parcela da energia potencial elástica ou de deformação. Os chamados princípios variacionais determinam que na situação de equilíbrio a Energia Potencial Total apresenta valor estacionário e que, dentro dos limites da resposta estrutural linear, um mínimo local dessa quantidade é condição necessária e suficiente para a estabilidade do equilíbrio (PROENÇA, 2010).

A energia de deformação é, por definição, uma forma de energia interna do sólido de natureza mecânica e movimentada no processo de deformação. Sendo representada por uma função continua do estado atual de deformação. Por definição a Energia Específica de Deformação ( $u_e$ ) é dada por:

$$\sigma = \frac{du_e}{d\varepsilon} \quad (1)$$

Para o caso elástico-linear (Lei de Hooke), a Energia Específica de Deformação torna-se:

$$u_e = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Assim, a Energia Potencial de Deformação (U) apresenta-se como uma forma quadrática no tensor das deformações. Logo, integrando no corpo, obtemos:

$$U = \int_V u_e dV = \int_V \frac{E\varepsilon^2}{2} dV \quad (3)$$

Conforme Proença (2010), “U é um funcional do campo tensorial  $\varepsilon(x)$ , ou uma aplicação que associa um escalar a um tensor”.

A segunda parcela de energia que compõe a Energia Potencial Total está associada às forças aplicadas no sólido. Assim, quando um sólido passa de sua posição inicial à uma posição deformada, temos a ocorrência de uma variação da energia potencial de posição, ou seja, da Energia Potencial Externa ou das Forças Aplicadas ( $\Omega$ ). Assim, para o sistema com forças conservativas,  $\Omega$  é dada por:

$$\Omega = -\sum_i \int_V b_i u_i dV - \sum_j \int_A q_j u_j dA - \sum_k P_k u_k \quad (4)$$

Sendo,  $b_i$  as forças de volume,  $q_j$  as forças de superfícies e  $P_k$  as forças concentradas. Assim, conhecendo as parcelas de energia existentes temos que a Energia Potencial Total ( $\pi$ ) é obtido a partir da soma dessas parcelas, ou seja:

$$\pi = U + \Omega \quad (5)$$

A solução da equação (5) é determinada a partir dos Princípios Variacionais, nos quais são propostos dois teoremas. O Primeiro Teorema Variacional, situação de equilíbrio,  $\pi$  apresenta valor estacionário, ou seja, primeira variação nula. O Segundo Teorema Variacional, estabilidade do equilíbrio,  $\pi$  apresenta segunda variação positiva, condição necessária e suficiente.

Seja, a viga submetida a flexão mostrada na Figura 1. Logo, considerando as seguintes hipóteses: regime elástico linear, com pequenos deslocamentos e giros de suas seções transversais. Recordando alguns conceitos da Teoria Clássica de Viga, a Energia Potencial Total do problema, torna-se:

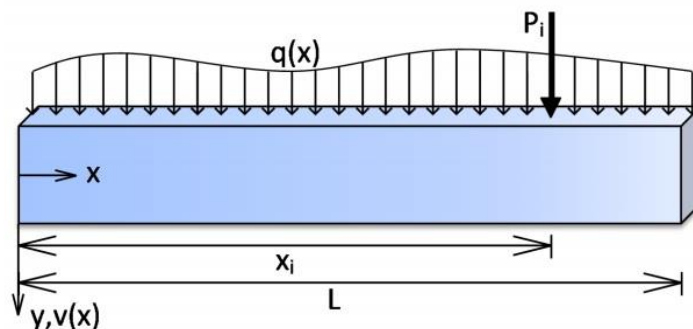


Figura 1 – Viga submetida a flexão. Fonte (PACCOLA, 2015).

$$\pi = \int_V \frac{E\varepsilon^2}{2} dV - \int_0^L qv dx - \sum_i P_i v_i \quad (6)$$



Utilizando, a hipótese de pequenos giros e deslocamentos pequenos, obtemos para  $\varepsilon$  a seguinte relação:

$$\varepsilon_x = -yv'' \quad (7)$$

Substituindo (7) em (6), e pela hipótese de Euler-Bernoulli, seção plana permanece plana e ortogonal a linha neutra, obtemos:

$$\begin{aligned} \pi &= \int_0^L \int_A \left( \frac{E(-yv'')^2}{2} dA \right) dx - \int_0^L qv dx - \sum_i P_i v_i \\ \pi &= \int_0^L \frac{E(v'')^2}{2} \int_A y^2 dA - \int_0^L qv dx - \sum_i P_i v_i \\ \pi &= \int_0^L \frac{EI}{2} (v'')^2 dx - \int_0^L qv dx - \sum_i P_i v_i \end{aligned} \quad (8)$$

Onde E, I, q e P representam, respectivamente, o módulo de elasticidade, o momento de inércia, o carregamento distribuído e a carga concentrada.

### Método de Rayleigh-Ritz

Dentro dos métodos de soluções aproximativas para a equação (5), o mais comumente utilizado é o Método de Rayleigh-Ritz, em que consiste, na minimização do funcional de energia potencial total. Como citado anteriormente, o Primeiro Teorema Variacional impõe que na condição de equilíbrio a primeira variação do funcional é nula. Assim, sendo  $y(x)$  a solução procurada para (5), podemos representar a energia potencial total por:

$$\pi[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad (9)$$

Adotando uma função aproximativa expressa por:

$$\tilde{y}(x) = \alpha_i \phi_i + y_0(x) \quad (10)$$

Onde  $\alpha_i$ ,  $\phi_i$  e  $y_0(x)$  são, respectivamente, os parâmetros incógnitos, as funções homogêneas nas condições de contorno essenciais e as funções que satisfazem as restrições essenciais de contorno. Então, substituindo (10) em (9), e realizando-se as integrais, obtemos:

$$\tilde{\pi} = \pi(\alpha_i) \quad (11)$$

Logo, partindo da condição de estacionariedade resulta:



$$\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (12)$$

Se o funcional for quadrático, (12) resulta em um sistema de equações algébricas lineares.

## Resultados e Discussões

Para a validação da formulação apresentada neste trabalho foi realizado um estudo de caso em uma estrutura simples de concreto armado, em que a planta de forma é mostrada na Figura 2. Primeiramente, vamos verificar o estado limite de deformação excessiva considerando somente os carregamentos verticais que estão atuando na viga V1. Depois vamos introduzir no modelo a variação de temperatura nas faces inferior e superior da viga V1.

A estrutura é formada por pilares com dimensões de 15x30 cm, vigas com dimensões de 15x40 cm e a laje sendo pré-moldada do tipo treliçada unidirecional com EPS e espessura de 12 cm (comumente utilizada nas construções de pequeno porte). As paredes de vedação serão de tijolos furados com espessura de 15 cm e altura de 2,8 cm. Como os pilares não possuem rigidez suficiente para engastar as vigas, considerou-se que as vigas são rotuladas.

Calculando o peso próprio da laje e da viga V1, obteve, respectivamente, 1,5 kN/m<sup>2</sup> e 1,5 kN/m. Ainda, considerou-se um acréscimo de 1,0 kN/m<sup>2</sup> atuante na laje devido ao peso próprio de um contra piso e revestimento cerâmico, logo, a carga permanente na laje é de 2,5 kN/m<sup>2</sup>. De acordo com a ABNT NBR 6120:1980 em edificações residenciais, a carga variável mínima para dormitórios, sala, copa, cozinha e banheiro é de 1,5 kN/m<sup>2</sup>, e para despensa, área de serviço e lavanderia é de 2,0 kN/m<sup>2</sup>, assim, adotou-se uma sobrecarga de 2,0 kN/m<sup>2</sup>.

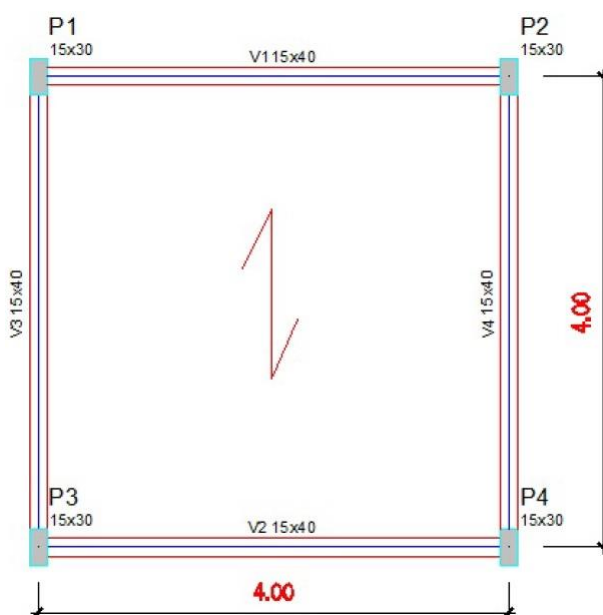


Figura 2 – Planta de forma da estrutura analisada.

O levantamento dos esforços para cada elemento estrutural foi realizado através do processo das áreas, conforme o item 14.7.6.1 da ABNT NBR 6118:2014. O vão efetivo da laje e da viga V1 foram determinados a partir das distâncias eixo a eixo de cada elemento. Portanto, a carga uniformemente distribuída na viga V1 é de 15,96 kN/m.

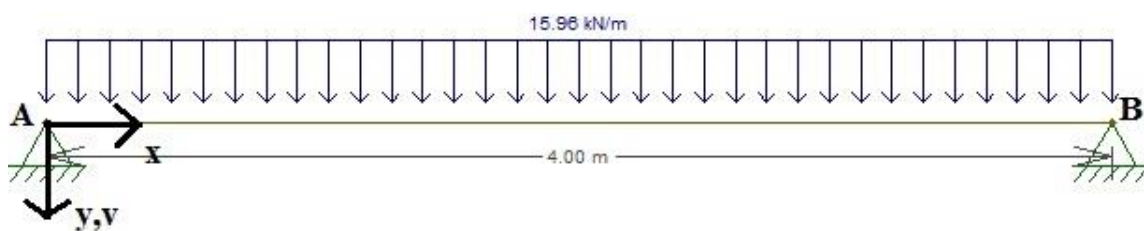
Considerando que a viga V1 seja concretada com um concreto de  $f_{ck}$  igual a 25 MPa, dosado com agregado formado por granito e gnaiss, a ABNT NBR 6118:2014 prescreve que o módulo de elasticidade inicial,  $E_{ci}$ , seja determinado pela seguinte expressão:

$$E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}} = 5600\sqrt{25} = 28000MPa \quad (13)$$

O módulo de elasticidade secante,  $E_{cs}$ , utilizado para a verificação do estado limite de serviço é estimado pela seguinte equação:

$$E_{cs} = \alpha_t E_{ci} = \left(0.8 + 0.2 \frac{f_{ck}}{80}\right) E_{ci} = 24080MPa \quad (14)$$

Partindo do esquema estático dado na Figura 3, sendo que a origem do sistema de coordenadas foi adotada no ponto A, podemos escrever a Energia Potencial Total do problema e através da minimização desta energia determinar a função que rege o comportamento da deformada da viga. Recordando o estudo de deflexão em viga, observa-se que a equação exata para os deslocamentos verticais para esta viga é dada por um polinômio do 4º grau. Assim, para determinar a função da deformada pelo Método da Energia, considerou-se também um polinômio 4º grau. Nota-se que as condições de contorno essenciais do problema, são os deslocamentos nulo no ponto A e no ponto B.



**Figura 3 – Esquema estático da viga em estudo.**

$$v(x) = a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 \quad (15)$$

Aplicando as condições de contorno, a função da deformada, torna-se:

$$v(x) = a_1(x^4 - 64x) + a_2(x^3 - 16x) + a_3(x^2 - 4x) \quad (16)$$

Então, o potencial de energia é dado por:



$$\pi = \int_0^4 \frac{EI}{2} (v'')^2 dx - \int_0^4 qv dx \quad (17)$$

Substituindo (16) em (17), aplicando o Método de Rayleigh-Ritz e a utilização de uma rotina no software Wolfram Mathematica 9.0 Student Edition, obtemos a seguinte deformada para a viga.

```
Clear["Global`*"];

e = 24080000; (*módulo de elasticidade*)
i = 0.0008; (*momento de inércia*)
l = 4; (*comprimento da viga*)
q = 15.96; (*carregamento distribuído na viga*)

v[x_] := a1 * (x^4 - l^3 * x) + a2 * (x^3 - l^2 * x) + a3 * (x^2 - l * x);
(*colocar aqui todos as condições de contorno, caso necessário*)

energia1 = Integrate[e * i / 2 * v''[x]^2 dx, {x, 0, l}]; (*energia potencial de deformação*)
energia2 = -Integrate[q * v[x] dx, {x, 0, l}]; (*energia potencial das forças aplicadas*)

var = {{a1}, {a2}, {a3}};
mat = Table[D[energia1, var[[i, 1]], var[[j, 1]]],
  {i, 1, Length[var]}, {j, 1, Length[var]}];
vec = -Table[D[energia2, var[[i, 1]], {i, 1, Length[var]}, {j, 1}];
res = Inverse[mat].vec;
res1 = Solve[mat.var == vec, {a1, a2, a3}];
a1 = a1 /. res1[[1]];
a2 = a2 /. res1[[1]];
a3 = a3 /. res1[[1]];
Plot[-v[x], {x, 0, l}]
```

Figura 4 – Rotina executada no Wolfram Mathematica.

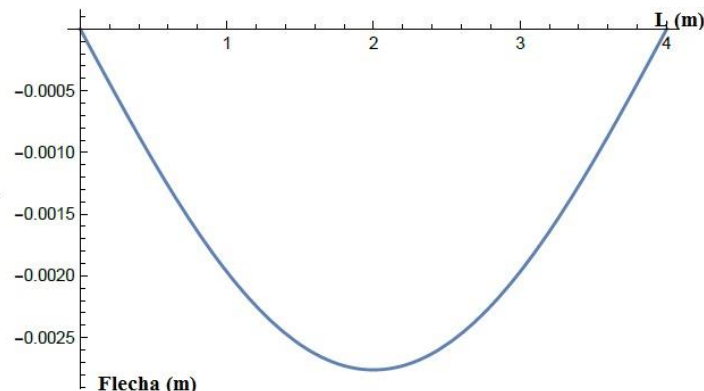


Figura 5 – Deformada da viga sem o efeito da temperatura.

A flecha máxima (meio do vão) determinada foi de 2,76 mm. Nota-se que como a função de aproximação dos deslocamentos foi do mesmo grau que a solução exata do problema, a equação da deformada da viga retorna os valores exatos ponto a ponto ao longo do comprimento da viga. Recordando da Mecânica dos Sólidos que a flecha máxima para a viga em estudo é dada por:



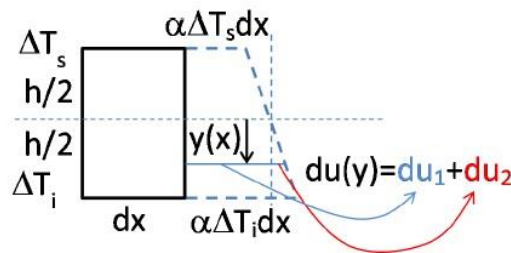
$$\delta = \frac{5qL^4}{384EI} = 2,76mm \quad (18)$$

Então, a flecha total é dada pela flecha inicial (elástica) mais a flecha diferida. A mesma pode ser obtida multiplicando-se a flecha inicial pelo coeficiente  $(1+\alpha_f)$ , com  $\alpha_f$  dado no item 17.3.2.12 da ABNT NBR 6118:2014. Em que este coeficiente leva em consideração o efeito da fluência que ocorre ao longo do tempo no concreto. Assim, considerando um tempo ( $t \geq 70$  meses) e carregamento aplicado em  $t_0 = 1$  mês (Tabela 17.1 da ABNT NBR 6118:2014), resulta:

$$\delta_t = \delta(1 + \alpha_f) = 2,76(1 + 1,32) = 6,40mm \quad (19)$$

A flecha limite admitida pela referida norma, na Tabela 13.2, para aceitabilidade sensorial é dada pelo comprimento do vão dividido por 250, resultando em 16 mm. Logo, como a flecha total é menor que a flecha limite ela atende as especificações normativas.

Agora vamos analisar a viga mostrada na Figura 3 considerando uma variação linear de temperatura, atuando na face inferior da viga uma temperatura ( $\Delta T_i$ ) e na face superior uma temperatura ( $\Delta T_s$ ), assim, partindo de uma seção de comprimento  $dx$  podemos determinar a deformação total que a viga está submetida, fazendo:



**Figura 6 – Deformações devido a uma variação de temperatura em um elemento de comprimento  $dx$ . Fonte (PACCOLA, 2015).**

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon_{elástico} + \varepsilon_{residual}$$

$$\varepsilon_{elástico} = \varepsilon_{total} - \varepsilon_{residual} = \varepsilon - \varepsilon_r \quad (20)$$

Combinando (20) e (2), a energia específica de deformação, torna-se:

$$u_e = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E(\varepsilon - \varepsilon_r) d\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} - E\varepsilon\varepsilon_r \quad (21)$$

A deformação residual é dada pela relação de compatibilidade o que resulta em:

$$\frac{du_2(y)}{dx} = \varepsilon_r(y) = \frac{\alpha y}{h} (\Delta T_i - \Delta T_s) \quad (22)$$

Em que,  $\alpha$ ,  $h$  e  $y$  são, respectivamente, o coeficiente de dilatação, altura da viga e a posição da fibra analisada. Logo, a Energia de Deformação é dada combinando (22), (21) e (3), aplicando a relação dada na equação (7), obtemos:





$$\begin{aligned}
 U &= \int_V \frac{E\varepsilon^2}{2} dV - \int_V E\varepsilon\varepsilon_r dV \\
 U &= \int_0^L \int_A \frac{E(-yv'')^2}{2} dA dx - \int_0^L \int_A E \left[ \frac{\alpha y}{h} (\Delta T_i - \Delta T_s) \right] (-yv'') dx dA \\
 U &= \int_0^L \frac{E(v'')^2}{2} \left( \int_A y^2 dA \right) dx + \int_0^L \frac{E\alpha}{h} (\Delta T_i - \Delta T_s) \left( \int_A y^2 dA \right) dx \\
 U &= \int_0^L \frac{EI}{2} (v'')^2 dx + \int_0^L \frac{EI\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} (v'') dx \quad (23)
 \end{aligned}$$

A equação (23) pode ser utilizada para determinar a Energia de Deformação para vigas com diferentes tipos de vinculações e carregamentos. Assim, para o caso em estudo a Energia Potencial Total, torna-se:

$$\pi = \int_0^4 \frac{EI}{2} (v'')^2 dx + \int_0^4 \frac{EI\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} (v'') dx - \int_0^4 qv dx \quad (24)$$

Utilizando a equação de aproximação dos deslocamentos dado em (16), e considerando que a temperatura na face superior da viga permaneça constante em 20 °C, podemos determinar os deslocamentos máximo da mesma (meio do vão), variando a temperatura na face inferior em 20, 50, 75 e 100 °C, como apresentado na Tabela 1. A temperatura foi limitada em 100 °C para garantir que o módulo de elasticidade do concreto não houvesse redução de seu valor, conforme a ABNT NBR 15200:2012. A parcela devido a variação de temperatura foi introduzida na rotina do software Mathematica (Figura 7). O coeficiente de dilatação térmica para o concreto foi admitido como sendo igual a 0,00001 °C<sup>-1</sup> de acordo com a ABNT NBR 6118:2014.

**Tabela 1 – Determinação da flecha elástica e flecha total considerando a combinação das cargas atuantes na viga e da variação de temperatura.**

$\Delta T_i$ (°C)	$\delta$ (mm)	$\delta_t$ (mm)
20	2,76	6,40
50	4,26	9,88
75	5,51	12,78
100	6,76	15,68

Recordando que na determinação da flecha total deve ser considerado o efeito da fluência do concreto, assim, para um tempo inicial de aplicação do carregamento de longa duração,  $t_0=1$  mês, e o tempo quando se deseja o valor da flecha total,  $t \geq 70$  meses, obtemos,  $(1+\alpha_f) = 2,32$ . A flecha total foi obtida multiplicando  $(1+\alpha_f)$  pela flecha elástica ( $\delta$ ). Verifica-se que para as condições de carregamento e vinculação da viga em estudo, a flecha total ficou dentro do limite prescrito para aceitabilidade sensorial. Logo, a equação (16) para um  $\Delta T_i = 100^\circ\text{C}$  e um  $\Delta T_s = 20^\circ\text{C}$  (última linha da Tabela 1), torna-se:

$$v(x) = -3.4203 * 10^{-5} (x^4 - 64x) + 2.7616 * 10^{-4} (x^3 - 16x) + 10^{-3} (x^2 - 4x) \quad (25)$$



```

Clear["Global`*"];

e = 24080000; (*módulo de elasticidade*)
i = 0.0008; (*momento de inércia*)
ti = 100; (*temperatura inferior*)
ts = 20; (*temperatura superior*)
h = 0.40; (*altura da viga*)
alfa = 0.00001; (*coeficiente de dilatação do concreto*)
l = 4; (*comprimento da viga*)
q = 15.96; (*carregamento distribuído na viga*)
v[x_] := a1 * (x^4 - l^3 * x) + a2 * (x^3 - l^2 * x) + a3 * (x^2 - l * x);
(*colocar aqui todos as condições de contorno, caso necessário*)

energia1 = Integrate[e * i / 2 * v''[x]^2 dx, {x, 0, l}; (*energia potencial de deformação*)

energia2 = Integrate[e * i * alfa * (ti - ts) / h * v''[x] dx - Integrate[q * v[x] dx, {x, 0, l};
(*energia potencial das forças aplicadas*)
var = {{a1}, {a2}, {a3}};
mat = Table[D[energia1, var[[i, 1]], var[[j, 1]]],
  {i, 1, Length[var]}, {j, 1, Length[var}}];
vec = -Table[D[energia2, var[[i, 1]], {i, 1, Length[var]}, {j, 1}];
res = Inverse[mat].vec;
res1 = Solve[mat.var == vec, {a1, a2, a3}];
a1 = a1 /. res1[[1]];
a2 = a2 /. res1[[1]];
a3 = a3 /. res1[[1]];
Plot[-v[x], {x, 0, l}]

```

Figura 7 – Rotina executada no Wolfram Mathematica com variação da temperatura.

## Conclusões

A avaliação do giro, momento fletor e esforço cortante é simplesmente determinada pela primeira derivada, segunda derivada multiplicado por sua rigidez e terceira derivada multiplicado também por sua rigidez, respectivamente, da equação (25). Assim, conclui-se, que a formulação apresentada neste trabalho pode ser utilizada para determinação dos deslocamentos, giros e esforços internos de qualquer tipo de viga sujeita a combinação de carregamentos (distribuídos e/ou concentrados) e uma variação de temperatura linear. No caso de estruturas formadas por vigas contínuas, faz-se necessário o acoplamento das condições de contorno essenciais (deslocamentos e giros) em cada subdomínio para garantir a continuidade.

## Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6120 – Cargas para Cálculo de Estruturas de Edificações, 1980.
- PACCOLA, R.R. Método da Energia. EESC-USP, 2015 (Notas de Aulas).
- PROENÇA, S.P.B. Introdução aos Métodos Numéricos. EESC-USP, 2010 (Notas de Aulas).
- SAVASSI, W. Introdução ao Método dos Elementos Finitos em Análise Linear de Estruturas. EESC-USP, 2000.
- SORIANO, H.L. Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas. EDUSP, 2003.
- WOLFRAM MATHEMATICA 9.0 STUDENT EDITION, Programa computacional.