



IX CONGRESSO BRASILEIRO DE PONTES E ESTRUTURAS
18 a 20 de maio, 2016 - Everest Rio Hotel

Análise de Confiabilidade de Fundações de Máquinas pelo Método de Monte Carlo

Rodrigo G. Martins¹, Sérgio Hampshire de C. Santos²

¹UFRJ / FORCONSULT Projetos e Consultoria em Engenharia / rodrigo.martins@forconsult.com.br

²UFRJ / Departamento de Estruturas / sergiohampshire@poli.ufrj.br

Resumo

O avanço e a popularização das ferramentas computacionais têm tornado a Análise de Confiabilidade cada vez mais presente na prática da Engenharia Civil de Estruturas. O presente trabalho trata o clássico tema do Projetos de Fundações de Máquinas, através de sua formulação classicamente conhecida, sob o ponto de vista da moderna Análise de Confiabilidade. Desenvolve-se o tema da Confiabilidade através do Método de Monte Carlo para quantificar as probabilidades de falha existentes em diversas condições de suporte geotécnico, tipo de equipamento e faixas de frequência de operação. É também demonstrada neste trabalho a influência de algumas variáveis aleatórias no problema, através de um exemplo e são propostos ao final do trabalho novos coeficientes de majoração das cargas.

Palavras-chave

Fundação de Máquinas, Análise de Confiabilidade, Método de Monte Carlo

Introdução

O cálculo de fundação de grandes e médias máquinas que exigem respostas ao comportamento dinâmico é tratado no dia a dia de projeto através de uma série de regras empíricas ou formulações matemáticas propostas por pesquisadores há alguns anos. Desde então, o assunto de fundação de máquinas tem tido pouco foco nas pesquisas.

Uma fundação que dê ao conjunto uma resposta dinâmica equivocada poderá trazer problemas de curto até longo prazo. Em projetos de todas as magnitudes, muitas das vezes não são feitos ensaios para a correta avaliação dos parâmetros do solo, o que neste tipo de análise requer uma especial atenção.

Este trabalho propõe avaliar os requisitos de segurança e economia do projeto, utilizando as formulações empregadas pelos projetistas, aliadas aos conceitos da Análise de Confiabilidade Estrutural, Projeto Baseado em Confiabilidade e Projeto Ótimo de Estruturas.

Fundação de Máquinas

A definição da base da fundação de uma determinada máquina é função de diversos parâmetros, entre eles a geometria da máquina, o espaço útil que se tem para dispor a fundação, a frequência de operação, as forças geradas pelo equipamento, o tipo da máquina e as características geotécnicas do terreno.

A base da fundação para máquinas pode ser avaliada através de duas principais linhas de abordagem: através de um modelo numérico avaliando a rigidez dos elementos estruturais que compõem o sistema ou através de um modelo em elementos finitos onde a base é modelada, por exemplo, a partir do uso de elementos tipo "SOLIDS".



Para a elaboração deste trabalho foi utilizada a primeira metodologia de modelagem e para isso, alguns conceitos de dinâmica básica precisam ser revistos.

Modelagem

A fundação em bloco do conjunto de uma ou mais máquinas é comumente idealizada como no esquema a seguir, onde uma massa M representa o bloco, um amortecedor viscoso de constante C e uma mola K representam o solo de fundação e uma força $F(t)$ representa os efeitos estáticos e dinâmicos que as máquinas introduzem ao conjunto.

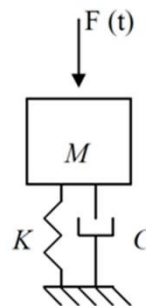


Figura 1 – Representação do Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Desta forma, generalizando-se para sistemas de diversos graus de liberdade, tem-se o sistema de equações diferenciais de movimento da Dinâmica Clássica (como por exemplo, mostrado por LIMA e SANTOS, 2008):

$$M \cdot u''(t) + C \cdot u'(t) + K \cdot u(t) = F(t) \quad (1)$$

Sendo M a matriz de massa, C a matriz de amortecimento, K a matriz de rigidez; $u''(t)$, $u'(t)$ e $u(t)$ são os vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos nos graus de liberdade, respectivamente e $F(t)$ é o vetor de forças aplicadas. No caso específico de fundações de máquinas, onde o amortecimento do solo (basicamente por radiação a partir da fundação) é elevado, é vantajoso resolver o sistema de equações (1) utilizando variáveis complexas.

A formulação mais moderna para o caso de fundações diretas retangulares sobre solo homogêneo é apresentada por WOLF (1994). Esta formulação foi empregada neste trabalho através de suas expressões, com as quais é possível calcular as rigidezes nas diferentes direções horizontais X e Y , direção vertical Z e rotações em torno de X , Y e Z .

Para a avaliação dos coeficientes de amortecimento, foram utilizadas as expressões desenvolvidas por RICHART (1970) para blocos circulares e dadas de forma equivalente para blocos retangulares.

Para a definição dos parâmetros do solo, é indicado que sejam feitos ensaios do tipo *cross-hole*, de maneira a se avaliar os valores de G e ν , módulo de deformação transversal (em kN/m^2) e coeficiente de Poisson, respectivamente obtidos em função da velocidade das ondas mássicas, primárias e secundárias, que se propagam no solo da fundação.



Existem alguns autores que correlacionam os resultados dos ensaios de SPT (*Standard Penetration Test*), em número de golpes N_{SPT} , com os valores de G , tais como Ohsaki e Iwasaki (*apud* SANTOS, 2015), que propõem a seguinte expressão:

$$G = 11,5 \cdot (N_{SPT})^{0,8} \quad (2)$$

Para avaliar a ordem de grandeza dos valores de G obtidos, de acordo com SANTOS (2015) é possível utilizar algumas tabelas em função do tipo de solo:

Tabela 1 - Valores usuais de projeto – Peso específico, Coeficiente de Poisson e Amortecimento

Tipo de Solo	ρ (t/m ³)	ν	ξ (%)
Areia	1,70 a 2,10	0,30 a 0,40	6,0
Argila	1,40 a 2,00	0,40 a 0,50	5,0
Rocha	2,50 a 2,70	0,15 a 0,30	2,0

Tabela 2 - Valores usuais de projeto – Capacidade de carga e módulo de cisalhamento

Capacidade de Carga (kPa)	Tipo de Solo	G (MPa)
≤ 50	Argilas moles	≤ 20
100	Argilas médias, areias fofas	40
200	Argilas rijas, areias médias	80
300	Argilas duras, areias compactas	120
≥ 500	Rocha alterada ou sã	≥ 180

Alguns cuidados devem ser tomados na determinação do valor de G , em função das incertezas envolvidas. É recomendável, no projeto com enfoque determinístico, se fazer uma variação paramétrica em torno do valor mais provável (“médio”) do módulo de cisalhamento, tomando uma variação percentual de $\pm 50\%$ sobre este valor, de modo a se obter três valores a serem usados na análise: $G_{MAX.}$, G_{MED} e $G_{MIN.}$

Os valores do amortecimento ξ correspondem a uma deformação distorcional nominal de 0,0001%, referente a uma faixa considerada usual em projeto de fundações de máquinas.

Uma vez determinados os parâmetros do sistema de equações (1), faz-se o cálculo dos deslocamentos $u(f_m)$, em função da frequência de operação da máquina (f_m). Esses deslocamentos, para cada direção, deverão ser avaliados levando-se em conta a parte real e a imaginária de seus valores obtidos na formulação complexa (ver SANTOS, 2015).

Com o valor de um dado deslocamento calculado é possível se calcular sua velocidade de cálculo efetiva, para cada uma das direções de interesse, por exemplo o deslocamento vertical u_z , através da seguinte expressão:

$$v_{calc_efet}(f_m) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot u_z(f_m) \cdot \omega(f_m) \quad (2)$$

Onde $\omega(f_m)$ é a frequência circular de operação da máquina.

Critérios de Aceitabilidade do Projeto

Segundo a norma ISO 2372 (1974) os equipamentos são divididos segundo classes e cada classe possui quatro faixas de operação que representam os limites estabelecidos em projeto.

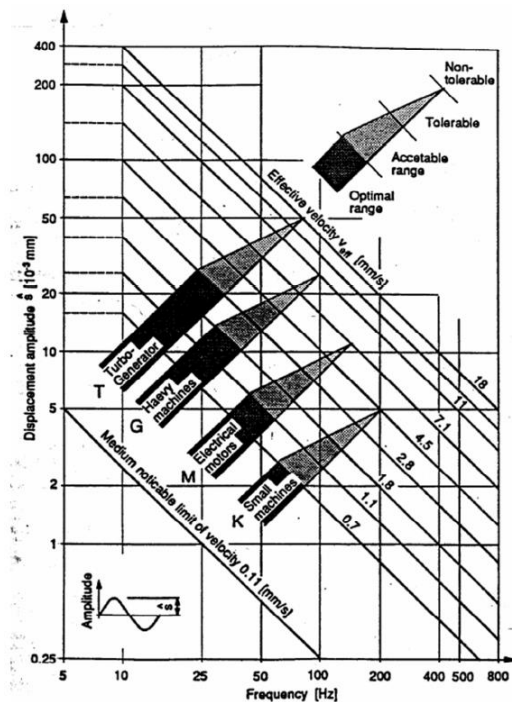


Figura 2- Gráfico das velocidades limites para classes de equipamentos (ISO 2372)

Regras de projeto empíricas do passado recomendavam parâmetros tirados de experiências de projetos anteriores “bem sucedidos”, como critérios para um projeto novo em desenvolvimento. Um exemplo deste tipo de recomendação é se usar o coeficiente β , razão entre a frequência de excitação e a frequência própria da estrutura, como parâmetro para aceitabilidade do projeto, tendo como valores aceitáveis de β , aqueles fora de uma faixa de 0,5 a 2,0. Estes critérios são superados por análises feitas com metodologias modernas.

Análise de Confiabilidade Estrutural

A Confiabilidade Estrutural é definida como o complemento de uma probabilidade de falha e deve levar em conta diversas incertezas existentes nas cargas, nas propriedades mecânicas dos materiais, nas imperfeições geométricas, entre outros. Pode ser utilizada como uma ferramenta auxiliar de projeto, na tentativa de minimizar os custos totais para um dado nível aceitável de risco ou para maximizar o nível de confiabilidade para um determinado custo. Se uma estrutura não atende aos objetivos para qual ela foi concebida, dizemos que ela falhou. Para a definição de alguns conceitos deste item, MELCHERS (1999) deve ser consultado.

É importante ressaltar que nenhuma estrutura possui uma probabilidade de falha igual a zero. Por isso, por menor que seja a probabilidade de falha, ela deverá estar dentro de níveis



aceitáveis de segurança. A probabilidade de falha P_f de uma estrutura tem valores na ordem de 10^{-3} a 10^{-6} .

Outro parâmetro muito comumente usado para medir a confiabilidade é o índice de confiabilidade β . Ele se relaciona com a probabilidade de falha pela expressão:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3)$$

onde $\Phi(-\beta)$ é a CDF da distribuição da normal padrão.

Para a avaliação da probabilidade de falha, pode-se utilizar uma função chamada *performance*, denominada $G(U_i)$, onde U_i é um vetor que inclui todas as variáveis aleatórias da análise. A probabilidade de falha é definida então como:

$$P_f = P(G(U_i) \leq 0,00) \quad (4)$$

De acordo com SAGRILO (2000), conhecendo-se a PDF (f_u) desta função, a probabilidade de falha pode ser expressa como:

$$P_f = \int_F f_u \cdot P(U_i) \cdot dU_i, \quad (5)$$

Onde F representa o domínio de falha ($G(U_i) \leq 0,00$).

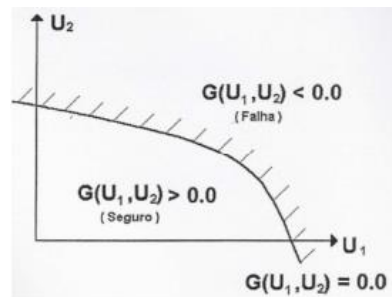


Figura 3 – Definição da função de falha (SAGRILO, 2000)

As incertezas envolvidas no projeto, na fabricação e no uso de uma estrutura podem ter diversas origens, tais como a incerteza natural de uma variável, o não perfeito conhecimento na avaliação das cargas, das solicitações e das resistências do material, imperfeições nos modelos de análise, entre outros.

A probabilidade de falha avaliada pela Confiabilidade Estrutural é um valor nominal e não pode ser comparada a valores obtidos a partir de dados reais de falhas ocorridas em estruturas, uma vez que a Confiabilidade Estrutural não leva em conta os erros humanos.

As ações atuantes nas estruturas podem ser representadas na maioria dos casos por modelos matemáticos que descrevem as variações no longo do tempo, espaço e direção de seus efeitos na estrutura. O nível de detalhe desta descrição é dado pelo equilíbrio entre qualidade das informações e o nível de precisão requerido, este último sendo controlado pela sensibilidade das decisões de projeto, que está ligada diretamente ao fator econômico.



Para o cálculo da probabilidade de falha P_f , foi utilizado neste trabalho o método de Monte Carlo. Este método utiliza uma dada função de falha e as variáveis aleatórias consideradas para o cálculo da P_f de um evento, resultando assim nas seguintes expressões:

$$P_f = \frac{1}{NP} \cdot \sum_{k=1}^{MP} I[G(U_k) \leq 0], \text{ sendo} \quad (4)$$

$$I[G(U_k) \leq 0] = 1 \text{ se } G(U_k) \leq 0 \text{ ou } 0 \text{ se } G(U_k) > 0, \quad (5)$$

Onde NP indica o número de valores da amostra e U_k representa os valores das variáveis aleatórias, gerados arbitrariamente a partir de seus parâmetros probabilísticos.

Análise dos Resultados da Confiabilidade Estrutural

Os anexos B e C do EUROCODE 2010 (1990) mostram que o índice de confiabilidade β pode ser determinado segundo várias classes de consequências, ou seja, de acordo com o tipo e proporção de dano que será assumido, caso haja alguma falha na estrutura. A seguir é mostrada uma imagem de uma tabela retirada do documento citado:

Classe de consequências	Descrição	Exemplos de edifícios e de obras de engenharia civil
CC3	Consequência elevada em termos de perda de vidas humanas; ou consequências econômicas, sociais ou ambientais muito importantes	Bancadas, edifícios públicos em que as consequências do colapso são elevadas (por exemplo, uma sala de concertos)
CC2	Consequência média em termos de perda de vidas humanas; consequências econômicas, sociais ou ambientais mediamente importantes	Edifícios de habitação e de escritórios, edifícios públicos em que as consequências do colapso são médias (por exemplo, um edifício de escritórios)
CC1	Consequência baixa em termos de perda de vidas humanas; e consequências econômicas, sociais ou ambientais pouco importantes ou desprezáveis	Edifícios agrícolas normalmente não ocupados permanentemente por pessoas (por exemplo, armazéns), estufas

Figura 4 – Definição de classes de consequências (EUROCODE 2010)

Ainda segundo a mesma referência, as classes de consequências podem ser associadas a classes de confiabilidade (“classes de fiabilidade”) seguindo o mesmo numeral.

Classe de fiabilidade	Valores mínimos de β	
	Período de referência de 1 ano	Período de referência de 50 anos
RC3	5,2	4,3
RC2	4,7	3,8
RC1	4,2	3,3

Figura 5 – Valores mínimos recomendados para o índice de confiabilidade β (estados limites últimos) (EUROCODE 2010)



Em geral, é tomado nas análises, como classe de consequências ou de confiabilidade, a CC2 ou RC2, respectivamente, onde as consequências econômicas, sociais ou ambientais do colapso são medianamente importantes. Segundo a mesma referência, a tabela abaixo define os valores de β alvo, também chamado de β_{TARGET} , para os diferentes estados limites.

Estado limite	Índice de fiabilidade alvo	
	1 ano	50 anos
Último	4,7	3,8
Fadiga		1,5 a 3,8 ²⁾
Utilização (irreversível)	2,9	1,5

¹⁾ Ver o Anexo B.
²⁾ Depende do grau de inspeção, reparação e tolerância face aos danos.

Figura 6 – Índice de confiabilidade alvo β para elementos estruturais da classe RC2 (EUROCODE 2010)

O valor do β_{TARGET} adotado para esse trabalho foi de 1,50 para o Estado Limite de Utilização (Vibração Excessiva).

Estudo de Caso

O objetivo do estudo de caso apresentado é fazer a análise de confiabilidade de um bloco de fundação dimensionado através da formulação matemática sucintamente explanada neste artigo.

O caso escolhido pode ter seu desenvolvimento completo consultado em SANTOS (2015). Consiste em uma base de concreto prismática retangular com 6,0 m de largura, 3,6 m de comprimento e 1,20 m de altura utilizada como fundação para um turbo-gerador, que tem frequência de operação igual a 11,83 Hz (710 rpm).

O peso do bloco é igual a 648 kN e o peso do equipamento é de 199,7 kN. Considera-se para o solo de fundação, $G = 20.000 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,30$ e massa específica $\rho = 1,7 \text{ t/m}^3$. A força excitadora agindo no conjunto, nas direções vertical e horizontal (transversal ao eixo da máquina) é de 155,40 kN.

Será aqui apresentada somente a análise segundo o eixo vertical. Maiores detalhes deste estudo podem ser encontrados na Dissertação de Mestrado do primeiro autor, (MARTINS, 2012).

Para facilitar a compreensão dos resultados obtidos, o desenvolvimento da análise é feito em etapas. Na Primeira Etapa se mostra a determinação das forças verticais máximas admissíveis para cada situação de solo. Na Segunda Etapa se fazem as Análises de Confiabilidade, com a determinação das correspondentes probabilidades de falha. Na Terceira Etapa, se aplica o conceito de “Projeto Baseado em Confiabilidade (RBDO)” com o objetivo de se determinar que dimensões o bloco deveria ter para se atingir um valor alvo para o Índice de Confiabilidade. Na Quarta Etapa se busca definir “coeficientes de segurança” a serem considerados em um projeto determinístico, de forma a se atingir o mesmo valor alvo para o Índice de Confiabilidade.



Na Primeira Etapa, para o cálculo das forças máximas, foram adotados os dados de entrada já mostrados, os valores médios do módulo de cisalhamento e possíveis faixas de variação a serem consideradas, ou seja, $G \pm 10\%$, $G \pm 20\%$, $G \pm 35\%$ e $G \pm 50\%$. Ainda como *input*, a velocidade de 18 mm/s é considerada como velocidade limite, correspondente à faixa tolerável da Classe de Turbo-Geradores, como pode ser calculado a partir da Figura 2.

Na Tabela 3 são mostrados resultados obtidos na Primeira Etapa, de obtenção de forças verticais máximas para cada variação paramétrica em torno da média, para $v_{eff} = 18$ mm/s.

Tabela 3 – Resultados encontrados na Primeira Etapa

Caso	G (kN/m ²)	Força Vertical Máxima (kN)
G MED	20000	165,20
G MED-10%	18000	161,55
G MED+10%	22000	169,50
G MED-20%	16000	157,80
G MED+20%	24000	175,30
G MED-35%	13000	153,55
G MED+35%	27000	183,65
G MED-50%	10000	151,60
G MED+50%	30000	192,95

Para a Segunda Etapa, a análise do problema foi feita com o estudo de 1.000.000 de casos para cada um dos valores utilizados de G, determinando-se assim a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade β . De acordo com o JCSS (2010), a variável que representa o peso específico do solo tem uma distribuição gaussiana e o coeficiente de variação (COV) variando na faixa de 0,05 a 0,10, de acordo com o tipo de solo; quanto melhor for o solo, mais homogêneo ele é, e conseqüentemente menor seu COV. O mesmo raciocínio pode ser empregado para a variável que representa o módulo de cisalhamento, com COV variando de 0,20 a 1,00. Para o coeficiente de Poisson, seu valor médio é de 0,30, com COV igual a 0,05.

Para o peso específico do concreto a mesma referência indica uma distribuição gaussiana, com média entre 24 e 26 kN/m³ e coeficiente de variação igual a 0,03.

A função de falha utilizada no exemplo compara a velocidade limite estipulada pela classificação de faixas com a velocidade efetiva calculada pela formulação analítica, de acordo com a expressão (6).

$$g(fm) = v_{limite} - v_{calc_efet}(fm), \quad (6)$$

Se $g(fm) < 0$, temos o contador $I=1$ e se $g(fm) \geq 0$, o contador $I=0$. A probabilidade de falha é dada pelo somatório I após o estudo dos n casos, ou seja:

$$P_f = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n I_i \quad (6)$$

Na Tabela 4 são apresentados os resultados obtidos através de uma rotina de cálculo gerada no aplicativo *Mathcad*. Como pode ser observado, quanto mais homogêneo é o solo de fundação, menor é a probabilidade de falha e, conseqüentemente, maior o índice de confiabilidade β . É importante ressaltar que para a força de 165,20 kN, equivalente à velocidade efetiva limite de 18mm/s, os resultados são valores bem abaixo do β_{TARGET} .



Tabela 4 – Resultados da Etapa 2 – Análise de Confiabilidade

Força (kN)	Solo Fraco (COV G=100%)		Solo Médio (COV G=60%)		Solo Bom (COV G=30%)	
	P_f (%)	β	P_f (%)	β	P_f (%)	β
155,40	34,210	0,407	28,401	0,571	8,955	1,344
153,50	24,323	0,696	19,467	0,861	4,373	1,709
151,60	15,641	1,009	11,614	1,195	1,822	2,092
153,55	24,665	0,685	19,911	0,845	4,464	1,699
157,80	45,864	0,104	39,022	0,279	17,495	0,935
161,50	58,243	-0,208	51,601	-0,04	34,384	0,402
165,20	64,775	-0,379	59,646	-0,244	52,331	-0,058
169,50	69,351	-0,506	66,349	-0,422	68,823	-0,491
175,30	73,642	-0,632	72,800	-0,607	83,823	-0,987
183,65	78,084	-0,775	79,316	-0,817	93,998	-1,555
192,95	81,784	-0,907	84,300	-1,007	98,110	-2,077

Na Terceira Etapa, foram feitas variações na dimensão z do bloco (altura), mantendo as dimensões em planta, com a força vertical aplicada correspondente ao G_{MED} . A seguir os resultados desta etapa.

Tabela 5 – Resultados da Etapa 3 – F=165,20 kN

z (m)	Solo Fraco (COV G=100%)		Solo Médio (COV G=60%)		Solo Bom (COV G=30%)	
	P_f (%)	β	P_f (%)	β	P_f (%)	β
1,20	64,638	-0,376	59,646	-0,244	52,331	-0,058
1,25	59,571	-0,242	58,824	-0,121	43,210	0,171
1,30	46,761	0,081	45,065	0,124	31,464	0,485
1,35	28,460	0,569	28,982	0,554	18,295	0,904
1,40	13,638	1,097	13,362	1,109	7,558	1,435
1,43	7,959	1,408	7,131	1,466	6,660	1,500
1,44	6,563	1,509	5,638	1,586	3,693	1,787
1,45	5,405	1,607	4,361	1,710	2,826	1,907
1,50	1,796	2,098	1,068	2,302	2,122	2,029

A Quarta Etapa tem o objetivo de determinar fatores de segurança a serem aplicados à força vertical. Os valores da força que atingem o β_{TARGET} são divididos pelo valor característico da força aplicada, gerando um fator γ , visando obter um projeto em que se atinja o valor alvo para o Índice de Confiabilidade.

Tabela 6 – Resultados da Etapa 4 – Fatores de Majoração Encontrados

Tipo Solo	F_{0v} limite (kN)	γF_{0v}
I – Solo Fraco	148,90	1,11
II – Solo Médio	150,00	1,10
III – Solo Bom	154,66	1,07



Conclusões

Neste trabalho foi apresentada a Análise de Confiabilidade de um projeto elaborado pela formulação matemática mais confiável encontrada na literatura.

Os resultados deste trabalho mostraram a necessidade de se estudar mais a fundo este tema, uma vez que indicaram que, ao menos para o exemplo analisado, a formulação não atende aos requisitos de segurança e durabilidade preconizados nas normas internacionais consultadas.

Em diversas ocasiões, a manutenção de máquinas é bastante custosa, principalmente pela necessidade de sua paralisação por um tempo grande. Substituir as máquinas por outras enquanto uma delas sofre manutenção nem sempre é viável financeira ou logisticamente.

Este trabalho teve como objetivo mostrar que é possível o uso da Análise de Confiabilidade como ferramenta de projeto, para que se consiga chegar a valores que atendam aos limites estabelecidos em normas de forma matematicamente consistente. Também se mostrou através da Análise de Confiabilidade, que o cálculo de um fator de majoração das forças aplicadas pode ser utilizado em um projeto com enfoque determinístico, após o mesmo ser balizado através de mais estudos sobre o tema.

O maior desafio encontrado é, como sabido por todo engenheiro, conseguir caracterizar adequadamente o solo. O estudo das propriedades do solo tem importância fundamental para a precisão das análises dinâmicas e para minimizar gastos desnecessários com manutenção, paralisação e até substituição de máquinas.

Referências

- EUROCÓDIGO 2010, Bases para o Projecto de Estruturas, NP EM 1990, 2009
- ISO 2372, Mechanical Vibration of Machines with Operation Speeds from 10 to 200 rev/s, First edition, Switzerland, 1974.
- JCSS – JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY. The Probabilistic Model Code. Acesso entre Jan. 2010 e Junho de 2012 no “site” do JCSS - <http://www.jcss.byg.dtu.dk/>
- LIMA, S. S. e SANTOS, S. H. C., Análise Dinâmica das Estruturas, 1ª ed., Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2008.
- MARTINS, R. G., Análise de Confiabilidade de Fundações de Máquinas pelo Método de Monte Carlo, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Programa de Projeto de Estruturas, Rio de Janeiro, 2012.
- MELCHERS, R.E. Structural Reliability Analysis and Prediction, 2nd Edition, John Wiley and Sons, New York, 1999.
- RICHART Jr., F. E., WOODS, R. D., HALL Jr., J. R, Vibrations of Soils and Foundations, 1ªed., Prentice-Hall, Inc., The University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA, 1970.
- SAGRILO, L. V. S., Apostila do Curso de Confiabilidade Estrutural, PEC/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
- SANTOS, S.H.C. Fundação de Máquinas (apostila). Departamento de Estruturas, Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.
- WOLF, J.P., Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models, 1ª ed., Prentice Hall, University of Michigan, MI, USA, 1994.