

Dimensionamento Elástico e Plástico de Lajes de Concreto Armado: Uma Análise sob a Perspectiva do Consumo dos Materiais

Vinícius Pereira Farias¹, Fabrício Longhi Bolina²

¹Unisinos / Pós-graduando em Projeto de Estruturas / vinicius_farias17@hotmail.com

²Unisinos / Professor curso pós-graduação em Projeto de Estruturas / fabriciolb@unisinos.br

Resumo

O presente trabalho apresenta um comparativo entre o consumo dos materiais obtidos no dimensionamento de uma laje maciça de concreto armado utilizando dois métodos de dimensionamento: elástico e plástico. O comparativo possui a finalidade de demonstrar a diferença em termos das quantidades dos materiais empregados e os custos de produção de uma laje de concreto hipotética, de espessura constante. No cálculo das quantidades, foi analisado apenas o consumo de aço das armaduras. No cálculo dos custos de execução, foram utilizados os coeficientes de consumo apresentados na planilha de orçamento PLEO para lajes de concreto armado, com o preço dos insumos sendo retirados da tabela de preços unitários do SINAPI para o mês de setembro de 2017. Os resultados indicam que a laje calculada pelo método plástico pode ter um consumo de materiais 37% menores do que pelo método elástico, possuindo redução de até 10% no custo total relacionado à execução.

Palavras-chave

Lajes maciças. Método Elástico. Método Plástico. Custos.

Introdução

Em edifícios executados em concreto armado, as lajes assumem grande importância como elemento de estrutura, uma vez que tem como responsabilidade absorver as cargas dos pavimentos e distribuí-las nas vigas ou paredes em que se apoiam. O tipo de laje mais usual na construção civil é a laje maciça de concreto armado, devido à sua simplicidade executiva e de cálculo.

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), lajes são “elementos de superfície plana, sujeitos principalmente a ações normais a seu plano”. São elementos estruturais em que a espessura é pequena em relação às suas dimensões em planta. Os carregamentos que são definidos para estes elementos são: peso próprio, revestimento, utilização, eventuais cargas de paredes e, em alguns casos, cargas concentradas.

Este trabalho visa o dimensionamento de lajes maciças de concreto armado, utilizando-se as análises elástica e plástica. Para a análise elástica o cálculo será feito através do método da teoria das placas delgadas ou, pela teoria de Kirchhoff, através do processo de séries. Na análise plástica utiliza-se o método das charneiras plásticas, conhecido pelo método das linhas de ruptura.

Neste trabalho, as lajes maciças que constituem o pavimento proposto foram analisadas com iguais condições de contorno e carregamentos nos dois critérios de análise (elástica e plástica). Foi determinado, além do método de cálculo, o consumo de materiais para os dois tipos diferentes de dimensionamento, com uma análise de custos para execução, objetivando saber qual a melhor relação custo e benefício. Os resultados

em relação ao consumo de materiais e aos custos para execução das lajes serão apresentados por meio de tabelas.

Conceitos Básicos dos Métodos Elástico e Plástico

Essencialmente o método elástico se baseia na análise do comportamento do elemento sob cargas de serviço e concreto não fissurado, conforme cita Carvalho e Figueiredo Filho (2016). Segundo os autores, no método elástico “[...] subestimam-se os deslocamentos, pois não é considerada a fissuração do concreto; também não se pode dizer que os esforços na situação de ruptura, usados no cálculo da armadura, são proporcionais aos obtidos em serviço”.

Entretanto o método plástico se baseia nos mecanismos de ruptura da laje, pois, procura identificar de que forma a laje chega ao colapso, e, para esta situação, são calculados os esforços pela teoria das charneiras plásticas. Ainda segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2016) no método plástico “[...] normalmente é difícil determinar os deslocamentos, não sendo assim, precisar informações sobre o comportamento da estrutura em serviço”.

Método Elástico

A análise e dimensionamento de lajes pela teoria das placas delgadas é baseado na Teoria da Elasticidade, cujas hipóteses variam conforme o tipo de placa admitida. Neste caso, considera-se que as placas são constituídas de material homogêneo, elástico, isotrópico, linear fisicamente e têm pequenos deslocamentos.

Segundo Araújo (2014), a solução do problema é obtida através de uma equação diferencial de quarta ordem, juntamente com as condições de contorno. Souza e Cunha (1998) citam que a desvantagem dessa teoria são as consideráveis dificuldades analíticas para a obtenção da solução e, por se aplicar dentro dos limites elásticos dos materiais, não se obtém estimativa mais precisa do comportamento próximo à ruptura e o real coeficiente de segurança existente.

Araújo (2014) diz que “a equação diferencial da placa é obtida considerando-se o equilíbrio de um elemento infinitesimal $dx dy$ tomado em uma posição genérica no plano da placa”. Como indicado na Figura 1 os esforços solicitantes nas faces do elemento são os momentos fletores M_x e M_y , os momentos de torção M_{xy} e M_{yx} e os esforços cortantes V_x e V_y .

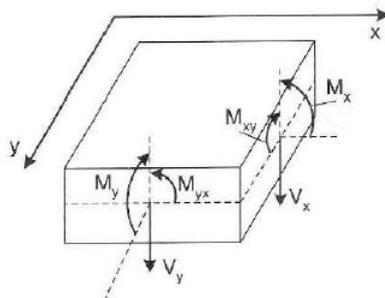


Figura 1 – Esforços solicitantes no elemento de placa $dx dy$.

A equação diferencial fundamental das placas delgadas, conhecida como equação de Lagrange, de quarta ordem, não homogênea, com coeficientes constantes e submetida a uma carga $p(x,y)$ é:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \quad (1)$$

Em que:

$w(x, y)$ = equação da flecha em qualquer ponto (x, y) ;

D = rigidez à flexão da placa;

$p(x, y)$ = carregamento uniformemente distribuído na laje.

A determinação dos esforços e dos deslocamentos de placas pode ser feita considerando-se as cargas em serviço, a partir da equação fundamental, ou, simplesmente, montando outro tipo de modelo, visto que essa equação tem solução analítica para poucos casos. Dessa forma, foi adotado neste trabalho o processo de séries para a representação do valor de $p(x,y)$ para o cálculo das lajes.

No cálculo por séries, substitui-se o valor de $p(x,y)$ por uma série normalmente composta de funções trigonométricas, obtendo-se uma solução para a integração da equação fundamental. Este processo de cálculo é bastante adequado para a confecção de quadros que possibilitam determinar momentos fletores máximos e deslocamentos máximos (flechas) a partir da geometria e das condições de vinculação da placa. Para isso, o pavimento deve ser discretizado, ou seja, cada laje deve ser tratada individualmente, de acordo com sua vinculação às demais.

Método Plástico

Segundo Duarte (1998) a primeira publicação a respeito da Teoria das Charneiras Plásticas foi realizada na Dinamarca no ano de 1921 por Ingerslev *apud* Duarte (1998). Sua teoria, entretanto, não era aplicável a muitos casos de lajes, pois não considerava os esforços cortantes ao longo das linhas de plastificação. No ano de 1931 Johansen acrescentou melhorias na teoria já existente tornando-a aplicável a diversos tipos de lajes.

Uma placa submetida a uma carga apresenta três fases de comportamento, uma inicial de comportamento elástico, em seguida a de fissuração e a de comportamento plástico. Quando uma placa é submetida a uma carga que cresce de forma gradual nos primeiros momentos a distribuição dos esforços se dá de forma elástica. À medida que se forma a fissuração as inércias são alteradas e os esforços são redistribuídos. Admitindo-se que a quantidade de armadura é inferior à quantidade limite pode-se afirmar que existe uma carga para a qual se atinge, em uma seção da placa, o limite elástico da armadura. Após esta carga diz-se que a seção se plastificou. À medida que a carga aplicada continua a aumentar outras seções da placa se plastificam formando, então, as linhas de ruptura que se caracterizam por apresentarem o momento fletor constante, destacam Montoya et al. (1981).

Conforme Pinheiro (1981) a teoria das charneiras plásticas apresenta um método de cálculo, baseado no comportamento plástico do material, que permite avaliar a carga de ruína das lajes de concreto armado. Existem materiais que são considerados

frágeis, cujas pequenas deformações são necessárias para que ocorra a ruptura, não havendo comportamento plástico, e materiais considerados dúcteis, cuja ruptura ocorre após grandes deformações, garantindo a ocorrência de comportamento plástico. Deste modo, a teoria das charneiras plásticas pode ser aplicada apenas para materiais dúcteis, cita Pinheiro (1988).

Na teoria das Charneiras Plásticas são consideradas apenas as chamadas cargas proporcionais, que são as que se mantém proporcionais entre si, variando de zero até seus valores máximos. Além disso, para a determinação da carga de ruína ao longo das charneiras, são considerados apenas os momentos fletores de plastificação, desprezando-se eventuais influências de forças normais e cortantes, cita Fusco (1995).

Quanto à configuração das charneiras plásticas, Pinheiro (1988) cita que se dá em função da natureza e da distribuição das cargas e da disposição das armaduras. Além disso, deve satisfazer as condições de apoio da laje de modo a ser geometricamente possível a formação da superfície poliédrica da laje deformada.

Para o cálculo através da Teoria das Charneiras Plásticas existem dois processos. O primeiro é chamado de processo de equilíbrio ou das forças nodais, que consiste em se estabelecer equações de equilíbrio para cada uma das regiões da laje dividida pelas linhas de ruptura. O segundo processo, chamado de processo do trabalho ou de energia, consiste na aplicação do princípio dos trabalhos virtuais à Teoria das Charneiras Plásticas, assumindo que não ocorre perda de energia na laje enquanto esta se deforma sob um determinado carregamento, destaca Duarte (1998).

A teoria das Charneiras Plásticas é capaz de prever a carga última das lajes com notável precisão em relação aos resultados obtidos através de ensaios. Além disso, permite aproveitar melhor a capacidade resistente da laje, resultando em dimensionamentos mais econômicos. Porém, isso só é prático em situações relativamente simples, como lajes retangulares com carga uniformemente distribuída.

Metodologia

Para realizar a comparação entre os métodos de dimensionamento elástico e plástico em relação ao consumo de materiais e custos foi elaborado um pavimento tipo com 3 (três) lajes, conforme Figura 2 a seguir.

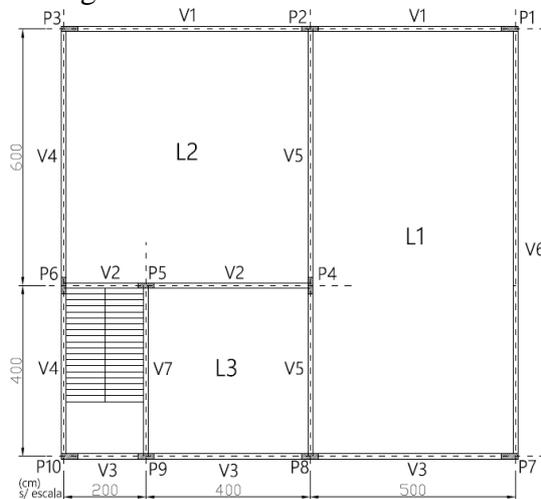


Figura 2 – Planta pavimento tipo.

Para a realização dos cálculos foi considerado que o pavimento servirá para salas de escritório, que os revestimentos do piso serão constituídos de contrapiso de argamassa com espessura de 2,0 cm e peso específico de 18 kN/m² e revestimento vinílico, cujo peso é de 0,20 kN/m². O concreto tem resistência característica de 20 MPa, e a classe de agressividade ambiental admitiu-se a II, cujo cobrimento nominal das armaduras é de 25 mm, segundo a NBR 6118 (2014). As vigas de contorno foram consideradas de largura (bw) igual a 12 cm e altura (h) igual a 40 cm. Para a carga accidental foi utilizado o valor de carga vertical adotado na NBR 6120 (1980) para escritórios, que é de 2,0 kN/m².

Primeiramente, procedeu-se ao pré-dimensionamento da altura das lajes de concreto armado. A altura final de uma laje é função da deformação limite ou do momento no estado limite último, e antes do cálculo dos esforços é necessário estimar a altura para a determinação das cargas e efetuar correções posteriores se necessário. Da mesma forma que para as vigas, na NBR 6118 (2014) não existe recomendação sobre a altura inicial a ser adotada, apenas estipula valores limites mínimos para a espessura das mesmas que devem ser respeitadas, decidindo-se então neste trabalho adotar a recomendação da NBR 6118 (1980), item 4.2.3.1.C, que para vigas de seção retangular ou “T” e lajes maciças retangulares de edifícios, as condições de deformações limites estariam atendidas quando o valor da altura útil respeitar a Equação (2).

$$d \geq \frac{l}{\psi_2 \cdot \psi_3} \quad (2)$$

Em que:

ψ_2 = coeficiente dependente das condições de vinculação e dimensões da laje;

ψ_3 = coeficiente que depende do tipo de aço;

l = menor lado dos dois vãos das lajes.

Com isso, o valor da altura “h” da laje pode ser determinado somando-se ao valor de “d”, o cobrimento “c” que foi considerado mais uma vez e meia o diâmetro “ ϕ ” da armadura empregada ($h = d + c + \phi + \phi/2$). Na Tabela 1 são mostradas as características gerais das lajes e das cargas aplicadas nas mesmas:

Tabela 1 – Características das lajes e cargas aplicadas.

Laje		L1	L2	L3
Características	Lx (m)	5,00	6,00	4,00
	Ly (m)	10,00	6,00	4,00
	λ	2,00	1,00	1,00
	h (cm)	12,00	12,00	12,00
Cargas (KN/m ²)	p.p. (g1)	3,00		
	Contrapiso + piso (g2)	0,56		
	g= g1 + g2	3,56		
	q	2,00		
	P= g + q	5,56		

As lajes L1, L2 e L3 do pavimento são consideradas isoladas, com esquema estrutural de acordo com a Figura 3. Todas as lajes serão armadas nas duas direções.

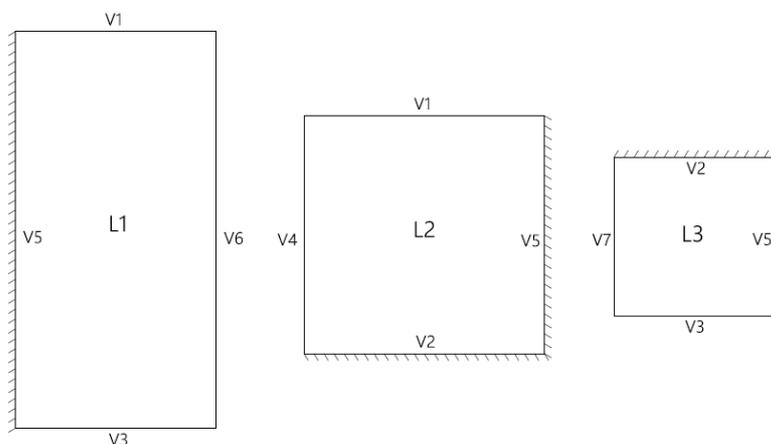


Figura 3 – Esquema de vinculação das lajes.

Resultados

Os resultados obtidos para os esforços e deslocamento através dos métodos elástico e plástico, respectivamente, estão apresentados na Tabela 2 e 3.

Tabela 2 – Momentos pelo método elástico e deslocamento máximo das lajes.

Laje	Momentos (KN/m ²)				Flecha
	mx	my	mx'	my'	
L1	9,05	2,06	-17,15	-	0,54
L2	5,62	5,62	-13,99	-13,99	
L3	2,50	2,50	-6,22	-6,22	

Tabela 3 – Momentos pelo método plástico e deslocamento máximo das lajes.

Laje	Momentos (KN/m ²)				Flecha
	mx	my	mx'	my'	
L1	8,39	2,26	-12,60	-	0,54
L2	5,00	5,00	-7,50	-7,50	
L3	2,23	2,23	-3,35	-3,35	

As flechas foram calculadas sem os efeitos da fissuração, mas considerando o efeito da fluência do concreto. Para levar em conta a deformação das vigas, as flechas limites usadas para as lajes foram uma parcela das prescritas pela norma, admitindo que a parcela restante das flechas ocorra nas vigas. Assim, se um ponto do pavimento atinge o deslocamento limite, será admitido que esse deslocamento se dê com dois terços ocorrendo na laje e um terço nas vigas de suporte da laje. Dessa forma, o deslocamento máximo da laje deve ser inferior a 2/3 do limite prescrito pela norma, segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2016). O valor de flecha demonstrado nas tabelas 2 e 3 correspondem ao da laje L1, que é o maior valor de flecha que ocorrerá entre todas as

lajes. O valor limite de flecha, verificado em relação ao limite de aceitabilidade sensorial, de acordo com a norma, para a laje L1 é de 1,33cm.

Para o cálculo da armadura, foi verificado inicialmente o valor de armadura mínima para as lajes, e posteriormente feito as alterações caso fosse necessário. Nas Figuras 4 e 5 abaixo é mostrado o detalhamento das lajes do pavimento.

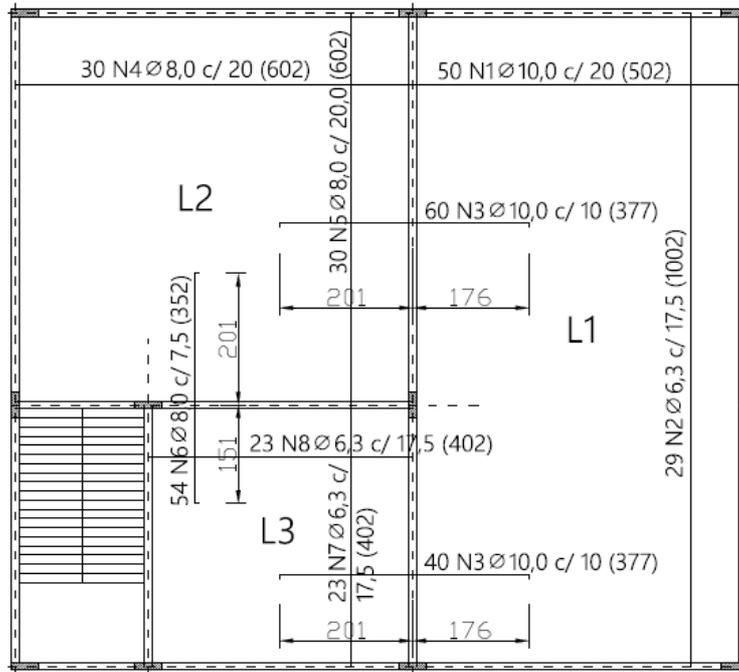


Figura 4 – Detalhamento das armaduras das lajes pelo método elástico.

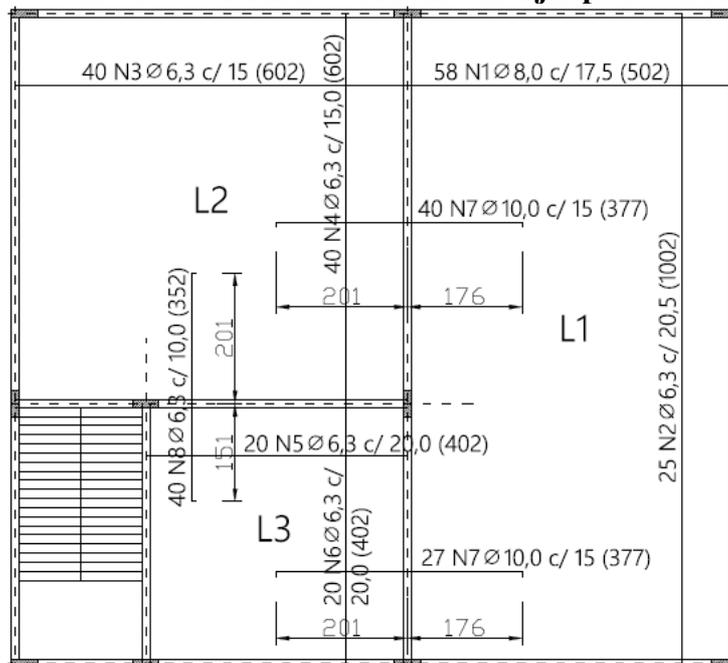


Figura 5 – Detalhamento das armaduras das lajes pelo método plástico.

As Tabelas 4 e 5 mostram o quantitativo de materiais resultantes dos dimensionamentos pelos dois métodos de cálculo:

Tabela 4 – Quantitativo de materiais pelo método elástico.

Laje	Aço (kg)	Concreto (m ³)
L1	342,36	6,00
L2	250,00	4,32
L3	129,36	1,92
Total	721,72	12,24

Tabela 5 – Quantitativo de materiais pelo método plástico.

Laje	Aço (kg)	Concreto (m ³)
L1	255,46	6,00
L2	181,77	4,32
L3	89,21	1,92
Total	526,44	12,24

Para o cálculo dos custos de execução, considerando apenas os materiais, foi utilizado os coeficientes de consumo apresentados na planilha de orçamento PLEO para execução de lajes de concreto armado por metro cúbico, e o preço dos insumos foram retirados da tabela de preços unitários de insumos do SINAPI para o mês de setembro de 2017. A Tabela 6 e 7 apresenta os custos envolvidos na execução considerando os dois métodos de cálculos das lajes.

Tabela 6 – Resultado dos custos de execução pelo método elástico.

Laje maciça de concreto armado – método elástico					
(composição de referência= PLEO cód. 51731; preços unitários referência Tabela SINAPI 09/2017)					
Material	Unid.	Coef.	Quant. Total	Preço unit.	Preço Total
Concreto usinado Fck= 20MPa, com bombeamento	m ³	1,00	12,24	310,00	3.794,40
Aço CA-50, bitolas variadas	kg	1,00	721,72	3,87	2.793,06
Arame recozido 18 BWG	kg	0,75	9,18	11,77	108,05
Pregos bitolas variadas	kg	2,00	24,48	7,00	171,36
Chapa de compensado resinado 12mm	m ²	3,60	44,06	10,70	471,59
Guia eucalipto 1x4”	m	19,20	235,01	1,62	380,71
Guia eucalipto 1x6”	m	5,50	67,32	2,32	156,18
Sarrafo eucalipto 1x3”	m	8,00	97,92	1,16	113,59
Escora eucalipto	m	20,00	244,80	1,22	298,66
Desmoldante para fôrma	l	0,20	2,45	6,10	14,93
Total					8.302,53

Tabela 7 – Resultado dos custos de execução pelo método plástico.

Laje maciça de concreto armado – método elástico
(composição de referência= PLEO cód. 51731; preços unitários referência Tabela SINAPI 09/2017)

Material	Unid.	Coef.	Quant. Total	Preço unit.	Preço Total
Concreto usinado Fck= 20MPa, com bombeamento	m ³	1,00	12,24	310,00	3.794,40
Aço CA-50, bitolas variadas	kg	1,00	526,44	3,87	2.037,32
Arame recozido 18 BWG	kg	0,75	9,18	11,77	108,05
Pregos bitolas variadas	kg	2,00	24,48	7,00	171,36
Chapa de compensado resinado 12mm	m ²	3,60	44,06	10,70	471,59
Guia eucalipto 1x4”	m	19,20	235,01	1,62	380,71
Guia eucalipto 1x6”	m	5,50	67,32	2,32	156,18
Sarrafo eucalipto 1x3”	m	8,00	97,92	1,16	113,59
Escora eucalipto	m	20,00	244,80	1,22	298,66
Desmoldante para fôrma	l	0,20	2,45	6,10	14,93
Total					7.546,80

Análise e conclusão

Pode-se observar que a economia no consumo de aço calculado pelo método das charneiras plásticas é bastante significativa em relação ao consumo de aço calculado pelo método elástico. Na estrutura proposta, o cálculo pelo método plástico resultou em uma economia de aço em torno de 37% em relação ao outro método calculado. Isto impactou diretamente nos custos, cuja economia ficou em torno de 10% para a execução das lajes calculadas pelo método plástico em relação ao método elástico.

Portanto, o cálculo plástico otimiza o dimensionamento das lajes comuns de concreto armado, pois a economia conseguida em alguns casos é bastante interessante.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6120: cargas para o cálculo de projeto de edificações. Rio de Janeiro, 1980.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ARAÚJO, J. M. Curso de Concreto Armado. 2 ed. Rio Grande, 2014. v. 2.

SOUZA, V. C. M; CUNHA, A. J. P. Lajes em Concreto Armado e Protendido. Rio de Janeiro. Ed. UERJ, 1998.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado Segundo a NBR 6118: 2014. EDUFSCAR, 2016.



- DUARTE, H. Aspectos da Análise Estrutural das Lajes de Edifícios de Concreto Armado. 1998. 84 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/static/media/producao/1998ME_HeraldoDuarte_1.pdf>. Acesso em: 28 de Out. 2017.
- MONTOYA, P. J.; MESEGUER, A. G.; CABRE, F. M. Hormigón Armado. 11 ed. Barcelona: Gustavo Gili, 1981.
- PINHEIRO, L. M. Charneiras Plásticas em Lajes com Forma de T: estudo experimental. 1981. 184 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/static/media/producao/1981ME_LibanoMirandaPinheiro_1.pdf>. Acesso em: 28 de Out. 2017.
- PINHEIRO, L. M. Análise Elástica e Plástica de Lajes Retangulares de Edifícios. 1988. 303 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/static/media/producao/1988DO_LibanoMirandaPinheiro.pdf>. Acesso em: 29 de Out. 2017.
- PLEO Planilha Eletrônica de Orçamentos, versão 4.0. Franarin Software e Orçamentos, 2018. Conjunto de programas. 1 CD-ROM.