

## **Dimensionamento automático de vigas protendidas biapoiadas considerando a protensão parcial**

**Izaura de Vargas Martins<sup>1</sup>, Lorenzo Augusto Ruschi e Luchi<sup>2</sup>, Wagner Klippel Dominicini<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal do Espírito Santo / Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil /  
vargas.izaura@gmail.com

<sup>2</sup>Universidade Federal do Espírito Santo / Departamento de Engenharia Civil /  
lorenzo@rl.eng.br

<sup>3</sup>Universidade Federal do Espírito Santo / Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil /  
wagner.kd@gmail.com

### **Resumo**

Este artigo trata da elaboração de uma ferramenta computacional para o dimensionamento de vigas protendidas biapoiadas conforme a ABNT NBR 6118:2014 – Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento. São contemplados os níveis de protensão completa, limitada e, especialmente, parcial. Para diferentes tipos de carregamento, distribuídos e pontuais, o programa realiza o pré-dimensionamento da força de protensão, calcula as perdas imediatas e progressivas, verifica os estados-limites de serviço e último. Em casos de protensão parcial, é verificada a abertura de fissuras na seção transversal mais solicitada. O programa foi desenvolvido utilizando o *Microsoft Excel* e o *Microsoft Visual Basic for Applications*, apresenta interface gráfica com o usuário e geração de memoriais de cálculo, servindo como recurso didático no meio acadêmico a níveis de graduação e pós-graduação. Os resultados obtidos são validados pela comparação com exemplos presentes na literatura.

### **Palavras-chave**

Vigas protendidas; protensão parcial; abertura de fissuras; força cortante.

### **Introdução**

A protensão tem sido muito utilizada na engenharia brasileira, tornando possível a execução de estruturas antes inviáveis ao concreto armado convencional. Assim, torna-se interessante o investimento no aperfeiçoamento dos métodos de cálculo e dimensionamento de peças protendidas. São poucos os programas que realizam esse dimensionamento, seguindo a ABNT NBR 6118:2014 – Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento, e os que existem, geralmente são comerciais.

O desenvolvimento de ferramentas computacionais para o dimensionamento de estruturas de concreto armado e protendido, assim como para o ensino de engenharia, é um campo de fundamental importância para a pesquisa, uma vez que a utilização de muitos programas fica limitada ao escritório técnico desenvolvedor. VENTRI e LINDENBERG NETO (2001) apontam a importância da utilização da informática e o desenvolvimento de animações no ensino de conceitos fundamentais da mecânica das estruturas, ASSIS *et al.* (2002) desenvolvem material didático multimídia via *web* para as disciplinas de concreto armado e concreto protendido.

No campo da protensão alguns trabalhos podem ser citados, KLEIN e LORIGGIO (2006), assim como NACHT (2015) apresentam uma ferramenta computacional para o

dimensionamento de vigas protendidas, nos níveis de protensão completa e limitada, que verificam apenas os estados-limites de serviço.

Em LAZZARI *et al.* (2013) é proposta uma ferramenta automática para o cálculo de vigas de concreto submetidas à flexão, protensão completa, limitada e parcial, utilizando a norma brasileira NBR 6118:2007 e a francesa *Règles BPEL 91*. SILVA (2015) apresenta o desenvolvimento de um programa para a verificação de seções poligonais de concreto armado e protendido submetidas à flexão composta oblíqua. LABADAN (2016) desenvolve um programa para o dimensionamento de vigas contínuas protendidas pós-tracionadas.

Observa-se que o concreto protendido é amplamente estudado, entretanto, poucos são os programas que abordam o nível de protensão parcial. Fato que contraria o mercado atual, uma vez que a protensão parcial proporciona um aproveitamento mais racional dos materiais, dosando-se convenientemente as armaduras ativas e passivas, como expõe EMERICK (2005).

Assim, este trabalho visa à elaboração de uma ferramenta computacional para o dimensionamento de vigas protendidas, contemplando em especial a protensão parcial e o dimensionamento a força cortante, que possa ser utilizada no meio acadêmico como recurso didático adicional na disciplina Concreto Protendido. O programa é desenvolvido utilizando o *Microsoft Excel* e o *Microsoft Visual Basic for Applications*, a partir de DOMINICINI (2014), que desenvolve uma ferramenta para o dimensionamento de vigas biapoiadas protendidas, para os níveis de protensão completa e limitada, de acordo com a NBR 6118:2007.

## Protensão parcial

O nível de protensão parcial produz tensões de compressão mais brandas do que a limitada e completa. É especificado para a pré-tração na classe de agressividade ambiental I e pós-tração nas classes I e II. Deve-se verificar o estado-limite de serviço de abertura das fissuras, com valor limite de 0,2 mm, para a combinação frequente.

CHOLFE e BONILHA (2013) apresentam um roteiro para a verificação de peças com protensão parcial. Inicialmente, deve-se escolher o par das áreas de armadura passiva e ativa  $A_s$  e  $A_p$ , definir o número de barras e cabos e o seu alojamento. Então, é calculada a força de protensão provocada pelo pré-alongamento dos cabos, e verificada se a seção ultrapassou o estado-limite de serviço de formação de fissuras na combinação frequente, chegando ao estágio II, configurando a protensão parcial.

Passa-se ao cálculo do acréscimo de tensão da armadura ativa, com exceção daquela dentro de bainhas, e da armadura passiva que controla a fissuração no estágio II. Considera-se o diagrama linear do concreto comprimido, desprezando-se a sua resistência à tração (ver Figura 1).

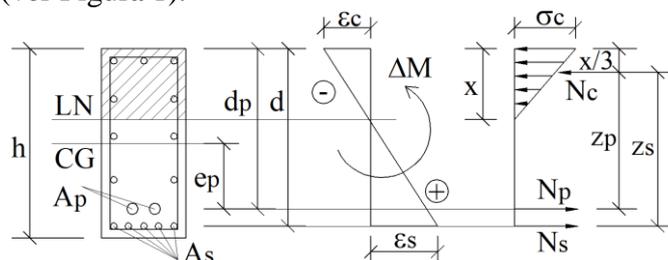


Figura 1 – Equilíbrio da seção transversal no estágio II

Do equilíbrio das forças, obtém-se a tensão na armadura passiva, ver equação (1).

$$\sigma_s = \frac{A_p \varepsilon_{pré} E_p}{\frac{A_{cc}}{2} \cdot \frac{1}{\alpha_e} \cdot \frac{x}{d-x} - A_s} \quad (1)$$

$\varepsilon_{pré}$  é o pré-alongamento dos cabos,  $A_{cc}$  é área de concreto comprimida,  $\alpha_e$  é a relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto,  $x$  é a posição da linha neutra,  $d$  e  $A_s$  são a altura útil e a área da armadura passiva, respectivamente.

Do equilíbrio dos momentos, chega-se a expressão (2).

$$\sigma_s = \frac{\Delta M - A_p \varepsilon_{pré} E_p \cdot \left(d_p - \frac{x}{3}\right)}{A_s \left(d - \frac{x}{3}\right)} \quad (2)$$

Onde  $\Delta M$  é o acréscimo de momento entre o estado-limite de decompressão e o carregamento na combinação frequente, e  $d_p$  é a altura útil da armadura ativa.

As equações (1) e (2) permitem o cálculo da tensão na armadura passiva de forma iterativa para cada posição da linha neutra. A resposta será o par  $\sigma_s$  e  $x$  que atender simultaneamente as duas equações. O programa desenvolvido calcula o par  $\sigma_s$  e  $x$  tanto para seções retangulares quanto para seções T, neste último caso as equações de tensões nas armaduras passivas foram desenvolvidas de maneira análoga à apresentada anteriormente para seções retangulares.

Determinada a tensão  $\sigma_s$ , deve-se calcular o valor característico da abertura de fissuras  $w_k$  conforme a NBR 6118:2014. Assim, para cada elemento ou grupo de elementos de armaduras passiva e ativa aderente que controla a fissuração, excluídos cabos em bainhas, considera-se uma área da região de envolvimento do concreto, constituída por retângulos com lados à distância máxima de  $7,5 \phi$  do eixo de cada elemento de armadura, ver Figura 2.

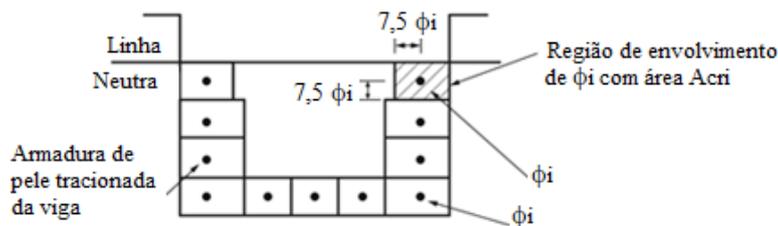


Figura 2 – Concreto de envolvimento da armadura

O valor característico da abertura de fissuras, calculado para cada parte da região de envolvimento, deve ser o menor dos obtidos nas equações (3) e (4).

$$w_k = \frac{\phi_i \sigma_{si} 3\sigma_{si}}{12,5\eta_1 E_{si} f_{ctm}} \quad (3)$$

$$w_k = \frac{\phi_i \sigma_{si}}{12,5\eta_1 E_{si}} \left( \frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right) \quad (4)$$

Em que  $\sigma_{si}$ ,  $\phi_i$ ,  $E_{si}$  e  $\rho_{ri}$  são definidos para cada área de envolvimento em exame;  $A_{cri}$  é a área da região de envolvimento protegida pela barra  $\phi_i$ ;  $E_{si}$  é o módulo de elasticidade do aço da barra considerada;  $\phi_i$  é o diâmetro da barra que protege a região de envolvimento considerada;  $\rho_{ri}$  é a taxa de armadura passiva ou ativa aderente, exceto em bainhas, em relação à área da região de envolvimento  $A_{cri}$ ;  $\sigma_{si}$  é o acréscimo de tensão entre o estado-limite de decompressão e o carregamento frequente, no centro de

gravidade da armadura, calculado no estágio II, considerando toda a armadura ativa; e  $\eta_1$  é o coeficiente de conformação superficial da armadura considerada.

### Dimensionamento à força cortante

NAAMAN (2012) aponta duas vantagens do concreto protendido em relação ao armado, relativas à resistência à força cortante: para mesmo carregamento e condições, o cortante no concreto protendido é menor, devido à angulação da força de protensão que gera uma componente vertical geralmente oposta ao carregamento externo, ver Figura 3; e a redução da tração diagonal devido à compressão induzida pela protensão. O seu ângulo de inclinação em relação ao eixo longitudinal da peça é reduzido.

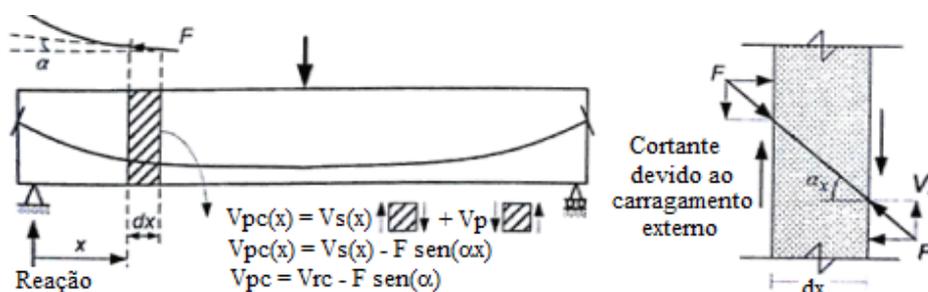


Figura 3 – Redução da força cortante no caso de cabo inclinado

No valor da força cortante solicitante de cálculo,  $V_{Sd}$ , deve ser considerado o efeito da força de protensão na sua direção,  $V_{P\infty}$ , com o valor de cálculo correspondente ao tempo  $t$  considerado.  $V_{Sd}$  será dado pela soma dos cortantes de cálculo devido às cargas permanentes e acidentais, com o cortante de cálculo devido à protensão, ver a equação (5), em que  $\gamma_f$  são os coeficientes de ponderação. No dimensionamento de vigas, devem ser satisfeitas, simultaneamente, as equações (6) e (7).

$$V_{Sd} = \gamma_{fg} V_g + \gamma_{fq} V_q + \gamma_{fp} V_{P\infty} \quad (5)$$

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (6)$$

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (7)$$

Em que  $V_{Rd2}$  é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto;  $V_{Rd3}$  é a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal;  $V_c$  é a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça; e  $V_{sw}$  é a parcela resistida pela armadura transversal.

O programa desenvolvido realiza o dimensionamento de vigas protendidas à força cortante pelos modelos de cálculo I e II, apresentados na NBR 6118:2014.

### Funcionamento geral do programa

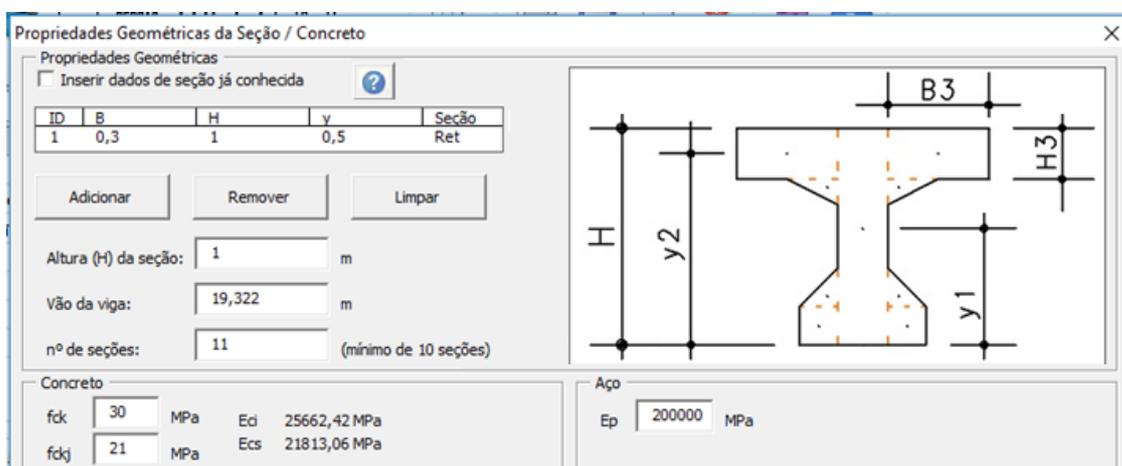
O programa desenvolvido apresenta tela inicial com uma barra de ferramentas com ícones para entrada de dados e geração de memórias de cálculo, ver Figura 4.



Figura 4 – Barra de ferramentas da tela inicial

Inicialmente, o usuário deve definir a geometria da seção transversal, que pode ser T ou retangular, o vão da viga e o número de seções de análise. Então, devem ser informadas a resistência característica à compressão do concreto, a resistência à compressão do concreto no momento da protensão e o módulo de elasticidade da armadura ativa, ver Figura 5.

Na próxima janela, ver Figura 6, são definidas a classe de agressividade ambiental e o nível de protensão. Para o caso de protensão parcial, deve-se informar a porcentagem do momento permanente a balancear, para o cálculo da área de armadura ativa necessária. Então, o usuário deve definir os carregamentos permanentes e acidentais, distribuídos e ou concentrados. Além disso, deve ser informada a excentricidade e porcentagem estimada de perda para o pré-dimensionamento da força de protensão inicial necessária.



**Propriedades Geométricas da Seção / Concreto**

Propriedades Geométricas  
 Inserir dados de seção já conhecida

ID	B	H	y	Seção
1	0,3	1	0,5	Ret

Adicionar    Remover    Limpar

Altura (H) da seção:  m

Vão da viga:  m

nº de seções:  (mínimo de 10 seções)

Concreto

fck:  MPa    Eci: 25662,42 MPa

fcj:  MPa    Ecs: 21813,06 MPa

Aço

Ep:  MPa

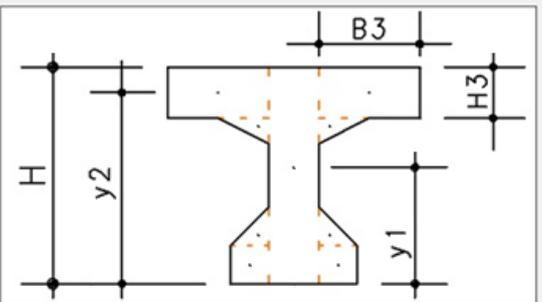
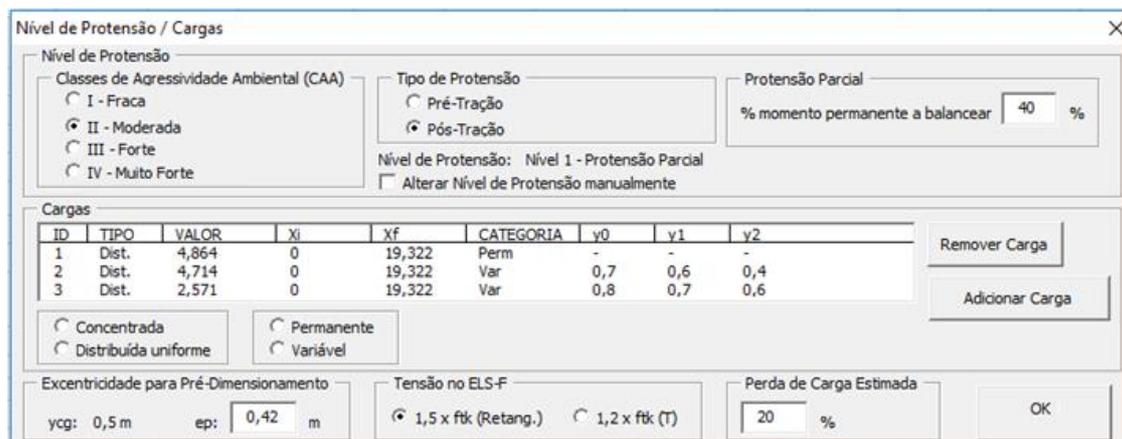


Figura 5 – Definição das propriedades geométricas da seção e materiais



**Nível de Protensão / Cargas**

Nível de Protensão

Classes de Agressividade Ambiental (CAA)

I - Fraca

II - Moderada

III - Forte

IV - Muito Forte

Tipo de Protensão

Pré-Tração

Pós-Tração

Protensão Parcial

% momento permanente a balancear:  %

Nível de Protensão: Nível 1 - Protensão Parcial

Alterar Nível de Protensão manualmente

Cargas

ID	TIPO	VALOR	Xi	Xf	CATEGORIA	y0	y1	y2
1	Dist.	4,864	0	19,322	Perm	-	-	-
2	Dist.	4,714	0	19,322	Var	0,7	0,6	0,4
3	Dist.	2,571	0	19,322	Var	0,8	0,7	0,6

Concentrada     Permanente

Distribuída uniforme     Variável

Excentricidade para Pré-Dimensionamento

ycg:  m    ep:  m

Tensão no ELS-F

1,5 x ftk (Retang.)     1,2 x ftk (T)

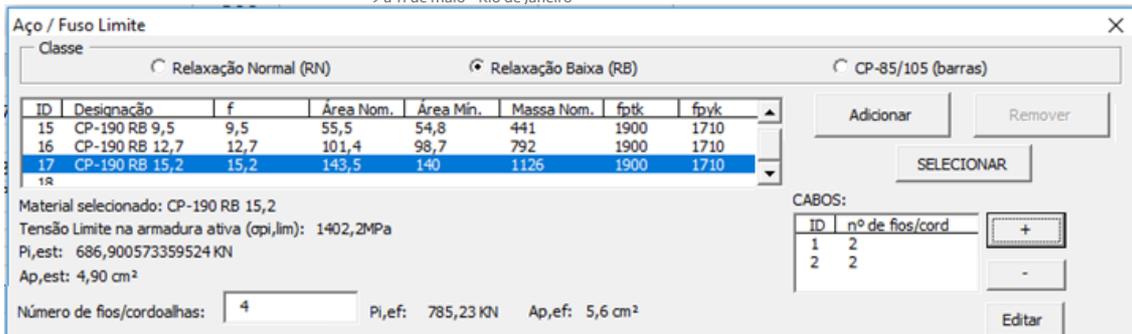
Perda de Carga Estimada

%

Remover Carga    Adicionar Carga    OK

Figura 6 – Definição do nível de protensão e cargas

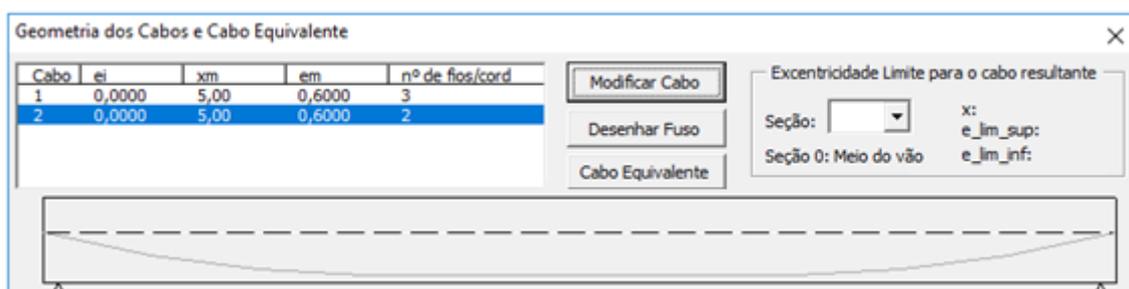
O programa calcula a força de protensão inicial necessária e fornece opções para o aço a ser adotado, realizada a escolha, e é calculado o número necessário de fios, cordoalhas ou barras. O usuário deve definir em quantos cabos estes elementos devem ser alojados e definir o perfil dos cabos, ver Figura 7 e 8. Para os níveis de protensão completa e limitada, o programa fornece também o fuso limite para os cabos.



ID	Designação	f	Área Nom.	Área Mín.	Massa Nom.	fptk	fpyk
15	CP-190 RB 9,5	9,5	55,5	54,8	441	1900	1710
16	CP-190 RB 12,7	12,7	101,4	98,7	792	1900	1710
17	CP-190 RB 15,2	15,2	143,5	140	1126	1900	1710

Material selecionado: CP-190 RB 15,2  
 Tensão Limite na armadura ativa ( $\sigma_{pl,lim}$ ): 1402,2MPa  
 $P_{i,est}$ : 686,900573359524 KN  
 $A_{p,est}$ : 4,90 cm<sup>2</sup>  
 Número de fios/cordoalhas:   $P_{i,ef}$ : 785,23 KN  $A_{p,ef}$ : 5,6 cm<sup>2</sup>

Figura 7 – Definição da armadura ativa

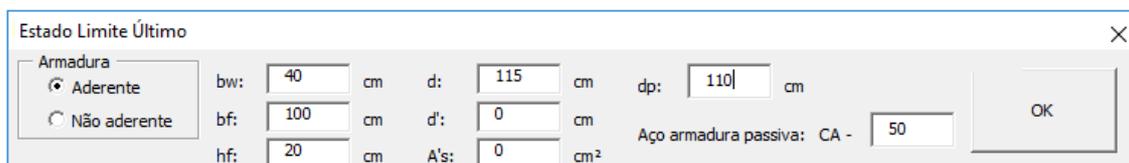


Cabo	ei	xm	em	nº de fios/cord
1	0,0000	5,00	0,6000	3
2	0,0000	5,00	0,6000	2

Figura 8 – Cálculo das perdas de protensão

Em seguida são calculadas as perdas de protensão imediatas e progressivas. O programa calcula a força de protensão ao longo do cabo e tensões nas seções de análise após as perdas, verifica os estados-limites de serviço e último no ato da protensão. Para protensão parcial, nas seções que ultrapassam o estado-limite de formação de fissuras na combinação frequente emite-se um aviso indicando a verificação do estado-limite de abertura das fissuras, que é analisado pelo programa posteriormente.

O usuário deve informar a largura da alma, dimensões da mesa, altura útil para as armaduras passiva e ativa, área de armadura dupla e sua altura útil. Então, o programa realiza o dimensionamento no estado-limite último e gera um relatório com a área de aço necessária em cada seção de análise (não é considerada a decalagem), ver Figura 9.



Estado Limite Último

Armadura  
 Aderente  
 Não aderente

bw:  cm    d:  cm    dp:  cm  
 bf:  cm    d':  cm  
 hf:  cm    A's:  cm<sup>2</sup>

Aço armadura passiva: CA -     OK

Figura 9 – Estado-limite último: dados de entrada e relatório

Obtida a área de armadura passiva necessária, realiza-se a verificação do estado-limite de abertura das fissuras na seção mais solicitada. Inicialmente, o usuário deve definir o diâmetro da armadura passiva longitudinal e da armadura transversal, bem como o número de ramos dos estribos. A partir destes dados, o programa aloja a armadura longitudinal e indica quantas camadas serão utilizadas e o número de barras por camada, assim é calculada a área da região de envolvimento da armadura.

Em seguida, o programa calcula a tensão na armadura passiva,  $\sigma_s$ , e a posição da linha neutra, de maneira que as equações (1) e (2) sejam satisfeitas simultaneamente.

Então, é calculado automaticamente o valor da abertura das fissuras, pelas equações (3) e (4). Assim, é verificado o estado-limite de abertura das fissuras, ver Figura 10.

**Verificação da abertura de fissuras**

Armadura passiva na seção central do vão  
Seção central do vão:  $x = 9,661$  m

As, nec: 16,448 cm<sup>2</sup>

Bitola longitudinal: 20 Diâmetro do Agregado: 19 mm

Bitola estribo: 5 Cobrimento: 2,5 cm

Nº ramos: 2

Armação: 6  $\phi$  20 As, adot: 18,85 cm<sup>2</sup>

Alojamento:  
1 camadas de 6 $\phi$ 20

**Concreto de envolvimento da armadura**

Linha Neutra

7,5  $\phi_s$

7,5  $\phi_s$

Região de envolvimento de  $\phi_s$  com área  $A_{sv}$

Armadura de pele traçonada da viga

Fonte: NBR 6118:2014

**Verificação da abertura de fissuras na seção central do vão**

Acri: 570 cm<sup>2</sup>

Tensão de tração:  $\sigma = 4,33$  kN/cm<sup>2</sup>

wk: 0,007 mm

Verificação: Ok!

Figura 10 – Verificação da abertura das fissuras

Para o dimensionamento à força cortante, o usuário deve optar pelo modelo de cálculo I ou II, informar o diâmetro da bainha da armadura ativa. É apresentada a opção de redução do cortante solicitante no caso de cargas próximas aos apoios. O programa verifica as diagonais comprimidas de concreto e calcula as armaduras transversais necessárias. O usuário deve arbitrar três faixas de distribuição para os estribos, onde serão automaticamente alojados, conforme escolha do diâmetro, ver Figura 11.

**Dimensionamento à força cortante**

Modelo de cálculo

Modelo 1

Modelo 2

Verificação da biela comprimida e armadura mínima

$\phi$  bainha: mm Aço estribo:

Redução VSd

bw,efet: cm Asw,min: cm<sup>2</sup>/m

Vsd,máx: 207,31 kN VSd,Asmin: kN

VRd2: kN

**Armação transversal - 1ª faixa**

Comprimento da faixa: cm

xi1: 0 cm

xf1:  cm

Vsd,máx,faixa1: kN

Asw,nec: cm<sup>2</sup>/m

Nº ramos:

Bitola:  mm

Alojamento:

Asw,adot: cm<sup>2</sup>/m

**Armação transversal - 2ª faixa**

Comprimento da faixa: cm

xi2:  cm

xf2:  cm

Vsd,máx,faixa2: kN

Asw,nec: cm<sup>2</sup>/m

Nº ramos:

Bitola:  mm

Alojamento:

Asw,adot: cm<sup>2</sup>/m

**Armação transversal - 3ª faixa**

Comprimento da faixa: cm

xi3:  cm

xf3: 1500 cm

Vsd,máx,faixa3: kN

Asw,nec: cm<sup>2</sup>/m

Nº ramos:

Bitola:  mm

Alojamento:

Asw,adot: cm<sup>2</sup>/m

Figura 11 – Dimensionamento à força cortante

## Protensão parcial: aplicação numérica

CHOLFE e BONILHA (2013) apresentam uma aplicação do dimensionamento de uma viga com protensão parcial e verificação do estado-limite de abertura das fissuras, cujos resultados são comparados com os obtidos pelo programa. Trata-se de uma seção retangular de 0,3m x 1,0m, dimensionada no estado-limite último resultando em  $A_p = 5,6 \text{ cm}^2$  (4  $\phi$  15,2) e  $A_s = 18,11 \text{ cm}^2$  (6  $\phi$  20; 18,90  $\text{cm}^2$ ), ver Figura 12.

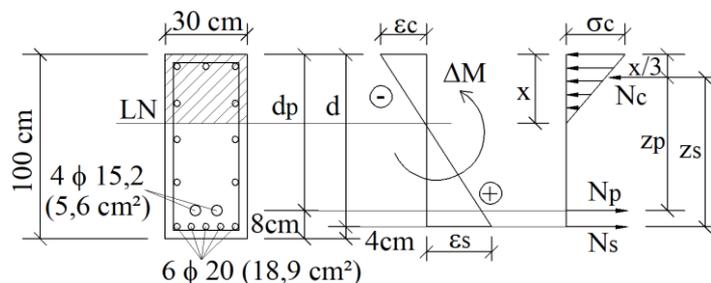


Figura 12 – Aplicação numérica: seção transversal

Utiliza-se o concreto C30, aço CP190 ( $E_p = 200000 \text{ MPa}$ ;  $\epsilon_{pr\acute{e}} = 5,50 \text{ ‰}$ ) e CA50 ( $E_s = 210000 \text{ MPa}$ ,  $\alpha_e = E_s/E_c = 15$ ). As solicitações são  $M_{g1k} = 350 \text{ kN.m}$ ,  $M_{g2k} = 227 \text{ kN.m}$ ,  $M_{q1k} = 220 \text{ kN.m}$  ( $\psi_1 = 0,6$ ;  $\psi_2 = 0,4$ ) e  $M_{q2k} = 120 \text{ kN.m}$  ( $\psi_1 = 0,7$ ;  $\psi_2 = 0,6$ ).

Não é indicado o vão da viga nem o carregamento, apenas os momentos fletores solicitantes. Porém, estes não são dados de entrada no programa, que os calcula a partir do peso próprio da estrutura, cargas permanentes, acidentais e vão da viga. Portanto, para utilização da ferramenta, devem ser calculados o vão da viga e carregamentos que resultem nos momentos fletores apresentados. Considerando  $M_{g1k} = 350 \text{ kN.m}$  referente ao peso próprio da estrutura, é calculado o vão da viga,  $L = 19,322 \text{ m}$ , e a partir dele, obtém-se as cargas distribuídas  $g_2 = 4,864 \text{ kN/m}$ ,  $q_1 = 4,714 \text{ kN/m}$  e  $q_2 = 2,571 \text{ kN/m}$ .

A Tabela 1 apresenta a comparação dos resultados obtidos, observa-se que são muito próximos. CHOLFE e BONILHA (2013) arbitram o valor do pré-alongamento dos cabos como 5,5 ‰, enquanto o programa calcula este valor em função da força de protensão após as perdas, encontrando o valor 5,789 ‰. Ao arbitrar o mesmo valor no programa, são encontrados resultados semelhantes para  $N_{p\infty}$ ,  $\Delta M$ ,  $x$ ,  $\sigma_s$  e  $w_k$ .

Tabela 1 – Protensão parcial: comparação dos resultados

	CHOLFE e BONILHA (2013)	Programa
Área de armadura ativa $A_p$ ( $\text{cm}^2$ )	5,6	5,6
Alojamento da armadura ativa	4 $\phi$ 15,2	4 $\phi$ 15,2
Área de armadura passiva necessária $A_s$ ( $\text{cm}^2$ )	18,11	16,448
Alojamento da armadura passiva	6 $\phi$ 20 (1ª cam)	6 $\phi$ 20 (1ª cam)
Momento fletor na combinação frequente $M_{cf}$ (kN.m)	781	780,98
Pré-alongamento dos cabos $\epsilon_{pr\acute{e}}$	0,0055	0,005789
Força de protensão provocada pelo pré-alongamento dos cabos $N_{p\infty}$ (kN)	616	648,35
Acréscimo momento entre ELS-D e carregamento comb frequente (kN.m)	522,25	508,67
Área da região de envolvimento da armadura $A_{cr}$ ( $\text{cm}^2$ )	570	570
Posição da linha neutra $x$ (cm)	63	68,3
Acréscimo de tensão na armadura passiva $\sigma_s$ (kN/cm <sup>2</sup> )	6	4,33
Valor característico da abertura das fissuras $w_k$ (mm)	0,013	0,007

## Dimensionamento à força cortante: aplicação numérica

A seguir, apresentam-se os cálculos do dimensionamento à força cortante para a viga exposta anteriormente, para comparação com os resultados obtidos pelo programa. A distribuição dos estribos é realizada em três faixas, a primeira até a coordenada  $x_{f1} = x_{i2} = 6,5$  m, a segunda até  $x_{f2} = x_{i3} = 12,822$  m e a terceira até o segundo apoio.

Para consideração do efeito da armadura ativa, utiliza-se a carga equivalente ao esforço de protensão,  $q_{eq}$ , dada pela equação (8), onde  $L$  é o vão da viga,  $P_{final}$  é a força de protensão após as perdas e  $e_p$  é a excentricidade do cabo no meio do vão.

$$q_{eq} = -\frac{8 \cdot P_{final} \cdot e_p}{L^2} = -\frac{8 \cdot 686,55 \cdot 0,42}{19,322^2} = -6,179 \text{ kN/m} \quad (8)$$

Então, são calculados os cortantes solicitantes de cálculo máximos para cada faixa, conforme as equações (9) e (10), que satisfazem a expressão (11).

$$V_{sd,1} = V_{sd,3} = 1,4 \cdot \frac{(g_1 + g_2 + q_1 + q_2) \cdot L}{2} + 0,9 \cdot \frac{q_{eq} \cdot L}{2} = 212,03 \text{ kN} \quad (9)$$

$$V_{sd,2} = 212,03 - 1,4 \cdot (g_1 + g_2 + q_1 + q_2) \cdot 6,5 - 0,9 \cdot q_{eq} \cdot 6,5 = 69,37 \text{ kN} \quad (10)$$

$$A_p f_{pyd} + A_s f_{yd} \geq V_{sd} \rightarrow 5,6 \cdot 148,696 + 18,85 \cdot 43,48 \geq V_{sd} \quad (11)$$

A força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas é dada por (12), e observa-se que é maior que o cortante solicitante de cálculo máximo.

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd} b_w d = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot \frac{3}{1,4} \cdot 30 \cdot 96 = 1466,33 \text{ kN} \quad (12)$$

O momento fletor de cálculo solicitante máximo é  $M_{sd,max} = 1283,76$  kN.m e o momento fletor que anula  $\sigma_p$  na borda tracionada por  $M_{sd}$ ,  $M_0$ , é dado por (13).

$$M_0 = 0,9 \cdot P_{final} \cdot (e_p + W/A) = 0,9 \cdot 686,55 \cdot (0,42 + 0,05/0,3) = 362,5 \text{ kNm} \quad (13)$$

A parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça  $V_c$  é dada por (14).

$$V_c = 0,09 f_{ck}^{2/3} b_w d \left(1 + \frac{M_0}{M_{sd,max}}\right) = 0,09 \cdot 30^{2/3} \cdot 30 \cdot 96 \left(1 + \frac{362,5}{1283,76}\right) = 320,9 \text{ kN} \quad (14)$$

A área de armadura transversal necessária para a primeira e terceira faixa é obtida da equação (15). Logo, é necessário adotar nas três faixas, a armadura mínima dada por (16), em que  $\alpha$  é a inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal e  $s = 100$  cm. Portanto, as armaduras transversais podem ser alojadas em 2 ramos de  $\phi 5$  mm c/13.

$$A_{sw1/m} = A_{sw3/m} = \frac{V_{sd} - V_c}{0,9 \cdot d \cdot f_{ywd}} = \frac{212,03 - 320,9}{0,9 \cdot 0,96 \cdot 52,17} = -2,42 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (15)$$

$$A_{swmin} = 0,2 \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} b_w \cdot s \cdot \text{sen} \alpha = 0,2 \cdot \frac{2,896}{600} \cdot 30 \cdot 100 \cdot \text{sen} 90 = 2,9 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (16)$$

Os resultados dos cálculos e os obtidos pelo programa são semelhantes. (Tabela 2)

Tabela 2 – Dimensionamento à força cortante: comparação dos resultados

	Cálculos	Programa
Carga equivalente ao esforço de protensão (kN/m)	-6,179	-6,18
Cortante solicitante de cálculo máximos para 1ª e 3ª faixa (kN)	212,03	212,03
Cortante solicitante de cálculo máximos para 2ª faixa (kN)	69,37	69,373
Cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas (kN)	1466,33	1466,33
Parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça (kN)	320,9	320,92
Área de armadura transversal necessária para 1ª e 3ª faixa (cm <sup>2</sup> /m)	-2,42	-2,42
Área de armadura transversal mínima (cm <sup>2</sup> /m)	2,9	2,9

## Conclusões

O programa desenvolvido é capaz de realizar o dimensionamento de vigas protendidas biapoiadas de maneira satisfatória, inclusive para o nível de protensão parcial, verificando o estado-limite de aberturas das fissuras, área ainda pouco explorada pelos programas acadêmicos. A ferramenta também apresenta bons resultados para o dimensionamento à força cortante, além de apresentar interface gráfica com o usuário, o que facilita e amplia sua utilização. A geração de relatórios e memórias de cálculo torna a ferramenta mais didática, possibilitando sua adoção como recurso auxiliar no meio acadêmico a níveis de graduação e pós-graduação. O programa continua em desenvolvimento para a inclusão do cálculo e verificação das flechas, e futuramente pretende-se, ainda, expandi-lo para análise e dimensionamento de vigas hiperestáticas e lajes.

## Referências

- ASSIS, W. S.; BITTENCOURT, T. N.; NORONHA, M. Desenvolvimento de recursos multimídia para o ensino de engenharia de estruturas. Instituto Brasileiro do Concreto. São Paulo, 2002.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento. NBR 6118. Rio de Janeiro, 2014.
- BPEL 91. Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et reconstructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites. Paris, 1992.
- CHOLFE, L.; BONILHA, L. Concreto Protendido: Teoria e prática. São Paulo: PINI, 2013.
- DOMINICINI, W. K.; COELHO, L. H. Desenvolvimento de software educacional para análise e dimensionamento de estruturas em concreto protendido. Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. Juiz de Fora, 2014.
- EMERICK, A. A. Projeto e Execução de Lajes Protendidas. Rio de Janeiro, Ed. Interciência, 2005.
- KLEIN, R.; LORIGGIO, D. D. Dimensionamento por computador de vigas simplesmente apoiadas de concreto protendido pós tracionadas. Anais do VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto. São Paulo, 2006; p. 1132-1144.
- LABADAN, R. S. Design of post-tensioned prestressed concrete beam using Excel spreadsheet with Visual Basic Applications. International Journal of Advances in Mechanical and Civil Engineering, v. 3, p. 10-16, 2016.
- NAAMAN, A. E. Prestressed Concrete Analysis and Design: Fundamentals. 3.Ed. Michigan: Techno Press 3000, 2012.
- NACHT, P. K. K. Ferramenta gráfico-interativa de verificação de tensões no estado limite de serviço de vigas protendidas com pós-tração aderente. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- SILVA, L. M. Programa computacional para análise e verificação de seções de concreto armado e protendido com flexão oblíqua composta. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.
- VENTRI, D. A. B.; LINDENBERG NETO, H. Utilizando animações para introduzir conceitos fundamentais da mecânica das estruturas. XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. Porto Alegre, 2001.