



# **Cálculo e Verificação da Armadura Longitudinal de Vigas Pré-tracionadas Com Seção Composta e Considerando as Perdas Progressivas de Protensão**

**Thiago Bindilatti Inforsato<sup>1</sup>, Roberto Chust Carvalho<sup>2</sup>, Marcelo de Araujo Ferreira<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>UFSCar / Departamento de Engenharia Civil / thiago@pretec.com.br

<sup>2</sup>UFSCar / Departamento de Engenharia Civil / robertochustcarvalho@gmail.com

<sup>3</sup>UFSCar / Departamento de Engenharia Civil / marcelof@ufscar.br

## **Resumo**

Este trabalho apresenta um roteiro atualizado para determinar a armadura longitudinal de vigas pré-tracionadas, com seção composta de maneira que atenda a todas as prescrições normativas das NBR6118:2014 e 9062:2017. Apresentam-se como podem ser feitas as verificações do estado limite último, assim como as em serviço de fissuração. As perdas de protensão são consideradas levando-se em conta a idade dos concretos constituintes da seção na época em que cada etapa é executada. Na consideração das perdas, usa-se o procedimento de perdas progressivas. As hipóteses adotadas para o cálculo como seção composta, ou seja, com a consideração da capa funcionando com a laje são discutidas. Apresenta-se finalmente um roteiro de cálculo detalhado que permite ao projetista perceber logo a melhor solução, inclusive da necessidade do uso de protensão junto à borda superior. É resolvido um exemplo típico mostrando como o procedimento pode ser aplicado. Por fim, alguns comentários dos resultados e das outras possibilidades de situações que podem apresentar este tipo de vigas são feitos, destacando-se a grande influência do valor da perda de protensão na determinação da armadura longitudinal.

## **Palavras-chave**

Cálculo de armadura; vigas pré-tracionadas; seção composta; concreto protendido; perda de protensão.

## **Introdução**

A pré-fabricação de vigas em concreto protendido com aderência inicial, requer que o projetista use conhecimentos específicos da sistemática de protensão, e efetue o dimensionamento e as verificações em serviço com as ferramentas precisas para ter informações e obter um projeto eficaz.

## **Objetivo**

Apresenta neste trabalho um roteiro de cálculo para a determinação da armadura longitudinal, considerando as perdas progressivas. A teoria envolvida está aplicada simultaneamente com o exemplo de aplicação.

## Roteiro de cálculo

É proposto um roteiro para o dimensionamento de viga protendida como a aderência inicial, as sequências das etapas são definidas abaixo. As tabelas citadas encontram-se na NBR 6118:2014. Considera-se tensão normal de tração com o sinal negativo.

1º Definição da classificação do ambiente em relação a sua agressividade de acordo com a Tabela 6.1 – Classes de agressividade ambiental.

2º Define-se o tipo da protensão e as verificações pertinentes de fissuração por meio da definição da condição de agressividade do ambiente. Desta forma em função da CAA (condição de agressividade do ambiente) por meio da tabela 13.3 – Exigências de durabilidade relacionadas a fissuração e a proteção da armadura da NBR6118:2014 define-se o tipo de protensão e as verificações a serem feitas.

3º Os coeficientes  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são obtidos através da Tabela 11.2 – Valores do coeficiente  $\gamma_{f2}$  classificados de acordo com a ocupação do edifício.

4º Detalham-se os carregamentos atuantes no elemento e as suas datas respectivas de carregamento.

5º Estima-se uma perda de protensão, e determina-se a armadura no tempo infinito através da verificação da fissuração para a borda inferior.

6º Verifica-se em vazio com a armadura encontrada no item 5º se a tensão na fibra superior está dentro do limite. Caso o limite seja ultrapassado é possível a colocação de cordoalhas na fibra superior, limitando a tensão de tração na mesma.

7º Com esta armadura encontrada através da estimativa inicial, detalham-se os cabos na seção e calculam-se as perdas deferidas considerando as datas dos carregamentos determinadas no item 4.

8º Com a tensão final correta no cabo de protensão (tensão calculada considerando as perdas), verifica-se novamente a condição de fissuração no tempo infinito.

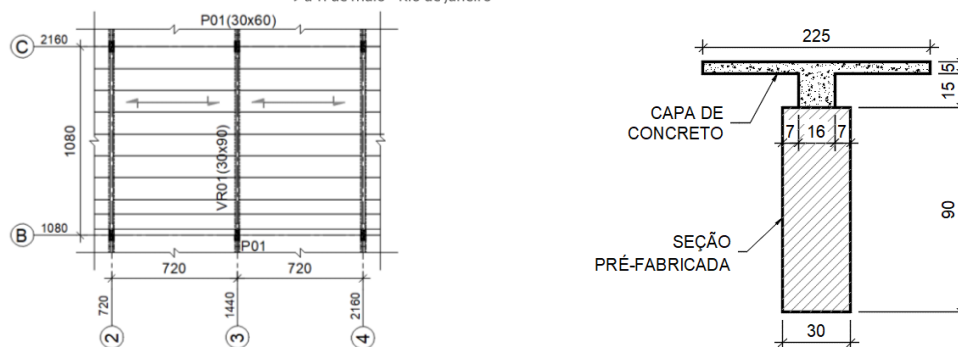
9º Verifica-se a armadura dimensionada em serviço é suficiente para atender a condição do ELU. Caso não seja pode-se completar com armadura frouxa.

10º Com a armadura definida para o tempo infinito, verifica-se a peça em vazio (verificação de ruptura simplificada).

11º Verifica-se a deformação excessiva com o cálculo estimado das flechas.

## Exemplo de aplicação

Calcular a viga VR01 de uma escola típica (Figura 1), considerando CAA II (protensão limitada). Materiais: armadura ativa, cordoalha de  $\phi$  12,7mm ( $A_p = 0,987 \text{ cm}^2$ ) CP 190RB;  $\sigma_{pi} = 1453 \text{ MPa}$ ; armadura frouxa CA-50; concreto pré-moldado  $f_{c,j,k}: 25 \text{ MPa}$  e  $f_{ck}: 40 \text{ MPa}$ ; concreto moldado no local (capa)  $f_{ck}: 30 \text{ MPa}$ . Carregamentos:  $g_1$  – peso próprio  $25 \text{ kN/m}^3$ ;  $g_2$  – laje alveolar:  $2,25 \text{ kN/m}^2$  ( $h = 15 \text{ cm}$ );  $g_3$  – capa:  $25 \text{ kN/m}^3$  ( $h = 5 \text{ cm}$ );  $g_4$  – alvenaria:  $18 \text{ kN/m}^3$  ( $h = 2,20 \text{ m}$  e largura de  $15 \text{ cm}$ );  $g_5$  – revestimento:  $0,80 \text{ kN/m}^2$ ;  $q$  – acidental:  $3,00 \text{ kN/m}^2$ .



**Figura 1 – Planta do pavimento e a seção da viga VR01.**

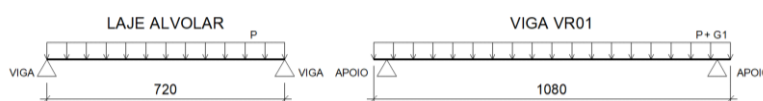
A Figura 1 mostra as duas seções transversais da viga VR01. A primeira é constituída apenas do elemento pré-moldado e a segunda é uma seção composta devido à aplicação da capa de concreto. Para a resolução será utilizada a sequência dos intervalos entre as fases de carregamentos descritas na Tabela 1.

**Tabela 1 – Sequência de intervalos entre as etapas, ações atuantes e seções consideradas.**

Fase	Tempo	Ação	Seção
1	$t_0 = 0$ ; $t = 24$ horas	p	Seção 1
2	$t_0 = 1$ ; $t = \infty$ dias	$p+g_1$	Seção 1
3	$t_0 = 15$ ; $t = \infty$ dias	$p+g_1+g_2$	Seção 1
4	$t_0 = 30$ ; $t = \infty$ dias	$p+g_1+g_2+g_3$	Seção 2
5	$t_0 = 45$ ; $t = \infty$ dias	$p+g_1+g_2+g_3+g_4$	Seção 2
6	$t_0 = 60$ ; $t = \infty$ dias	$p+g_1+g_2+g_3+g_4+g_5$	Seção 2
7	$t_0 = 75$ ; $t = \infty$ dias	$p+g_1+g_2+g_3+g_4+g_5+q$	Seção 2

### Carregamentos

Para determinar as ações que atuam na viga VR01 considera-se o vão efetivo (centro de giro),  $l_{ef} = 9,75$  m.



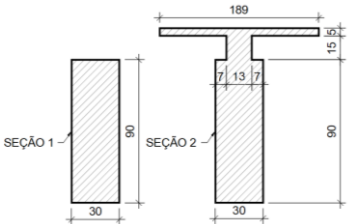
**Figura 2 – Esquema estrutural da laje e da viga VR01.**

Os momentos atuantes no meio do vão são:  $M_{g1} = 80,21$  kN.m;  $M_{g2} = 192,50$  kN.m;  $M_{g3} = 106,95$  kN.m;  $M_{g4} = 70,58$  kN.m;  $M_{g5} = 68,45$  kN.m;  $M_q = 256,67$  kN.m;

### Características geométricas

Para a seção composta, deve-se calcular a largura colaborante  $b_f$  que contribui, resultando em 2,25 m. Porém considerando que o concreto da mesa possui resistência menor que o da seção da viga pré-fabricada, multiplica-se este valor pela relação de  $r = \frac{E_{capa}}{E_{viga}} = \frac{0,875 \cdot 5600 \cdot \sqrt{30}}{0,90 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40}} = 0,84$ ;  $b_f = 0,84 \times 2,25 = 1,89$  m;  $p = 0,84 \times 0,16 \approx 0,13$  m. Finalmente as seções a serem consideradas nos cálculos de tensões pode ser visto na Figura 3.

**Figura 3 – Seções 1 e 2 com as respectivas características geométricas.**

Seções 1 e 2	Características 1	Características 2
	$A = 0,27 \text{ m}^2$ $y_{cg,i} = 0,45 \text{ m}$ $I = 1,82 \times 10^{-2} \text{ m}^4$ $W_i = 4,05 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ $W_s = 4,05 \times 10^{-2} \text{ m}^3$	$A = 0,389 \text{ m}^2$ $y_{cg,i} = 0,636 \text{ m}$ $I = 4,89 \times 10^{-2} \text{ m}^4$ $W_i = 7,69 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ $W_s = 1,05 \times 10^{-1} \text{ m}^3$

Com CAA II  $\rightarrow$  Protensão limitada com as verificações para o ELS.-F  $\rightarrow$  Combinação frequente ( $\psi_1$ ), limite de tensão  $f_{ctk,inf} = 0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2}$ . ELS. - D  $\rightarrow$  quase permanente ( $\psi_2$ ), limite de tensão  $\sigma > 0$ . Edifício público, os coeficientes a usar são  $\psi_1 = 0,6$  e  $\psi_2 = 0,4$ .

### Estimativa do número de cabos no tempo infinito consideração de fissuração

Escolhe-se aqui a condição de verificação em serviço para se pré-dimensionar a área de aço  $A_p$ , para isso adota-se uma perda de protensão na ordem de 20%,  $\sigma_{p,t=\infty} = 116,24 \text{ kN/cm}^2$ .

### Estado limite de formação de fissuras

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1}+M_{g2}+M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4}+M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_1 \cdot M_q}{W_{i,comp}} \geq f_{ctk,inf} \quad (1)$$

Substituindo os valores obtém-se:

$$\sigma_i = \frac{116,26 \cdot A_p}{0,27} + \frac{116,24 \cdot 0,40 \cdot A_p}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{7,69 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,6 \cdot 256,67}{7,69 \cdot 10^{-2}} \geq -2456 \rightarrow A_p > 6,79 \text{ cm}^2 \quad (2)$$

### Estado limite de descompressão:

A expressão a ser usada é mesma que a anterior trocando  $\psi_1$  por  $\psi_2$  e usando o limite correspondente chegando a:  $A_p \geq 7,93 \text{ cm}^2$ .

Considerando cordoalha de  $\phi 12,7 \text{ mm}$  com uma seção média de  $0,987 \text{ cm}^2$  tem-se:  $n_{cord} = \frac{7,93}{0,987} = 8,03$ . Considera-se aqui  $10\phi 12,7 \text{ mm}$ .

### Estimativa do número de cabos no tempo zero

Com  $A_p$  calculado no tempo infinito, pode-se verificar se a tensão de tração na fibra superior está dentro de limite. A solução proposta é a verificação da tensão já supondo a utilização de cordoalhas na fibra superior ( $A'_p$ ). Da mesma maneira estimando uma perda inicial de 2,5%,  $\sigma_{p,t=0} = 141,67 \text{ kN/cm}^2$ , para uma seção intermediária (0,31):

$$\sigma_{sup} = \overbrace{\frac{\sigma_{p,t=0} \cdot A_p}{A} - \frac{\sigma_{p,t=0} \cdot A_p \cdot e_p}{W_s}}^{\text{Cabo Inferior}} + \overbrace{\frac{\sigma_{p,t=0} \cdot A'_p}{A} - \frac{\sigma_{p,t=0} \cdot A'_p \cdot e'_p}{W_s}}^{\text{Cabo Superior}} + \frac{M_{g1}}{W_s} \geq -1,2 \cdot f_{ct,m} \quad (3)$$

$$\sigma_{sup} = \sigma_{p,t=0} \cdot A_p \cdot \left(\frac{1}{A} - \frac{e_p}{W_s}\right) + \sigma_{p,t=0} \cdot A'_p \cdot \left(\frac{1}{A} - \frac{e'_p}{W_s}\right) + \frac{M_{g1}}{W_s} \geq -1,2 \cdot f_{ct,m} \quad (4)$$

$$1,2 \cdot f_{ct,m} = 1,2 \cdot 0,3 \cdot \sqrt[3]{25^2} = 3,078 \text{ MPa} = 3078 \text{ kN/m}^2 \quad (5)$$

$$\sigma_{sup} = 141,67 \cdot 9,87 \cdot \left(\frac{1}{0,27} - \frac{0,40}{4,05 \cdot 10^{-2}}\right) + 141,67 \cdot A'_p \cdot \left(\frac{1}{0,27} - \frac{0,40}{4,05 \cdot 10^{-2}}\right) + \frac{67,44}{4,05 \cdot 10^{-2}} \geq -3078 \quad (6)$$

Com  $A'_p \geq 2,02 \text{ cm}^2$ , consideram-se duas cordoalhas de  $\phi 12,7 \text{ mm}$  com  $A_p = 1,974 \text{ cm}^2$ .

### Cabo representante para cálculo das perdas de protensão

Como se tem uma estimativa de 10 cabos na fibra inferior, são considerados 6 cabos na primeira camada a 4,5 cm da parte inferior da viga e a segunda camada a 8,5 cm, com o cabo representante a 6,1 cm da face inferior da viga.

### Cálculo das perdas de protensão

Com o número e posição dos cabos definidos, calculam-se as perdas levando em consideração as fases distintas de carregamentos e considerando também a seção simples e a seção composta de concreto.

### Perdas iniciais

$t = 1 \text{ dia}$ ;  $t_0 = 0$ ;  $\sigma_p = 145,30 \text{ kN/m}^2$ ;  $M_{g1} = 80,21 \text{ kN.m}$

### Deformação por ancoragem

Considerando-se uma pista de protensão com comprimento  $l=100 \text{ m}$  e uma acomodação da cunha  $\Delta l$  de 0,6 cm tem-se:

$$\Delta l = \frac{\Delta \sigma_{ancor} \cdot l}{E_p} \rightarrow \Delta \sigma_{ancor} = \frac{0,006 \cdot 2 \times 10^{-2}}{100} = 1,20 \text{ kN/cm}^2 \quad (7)$$

### Relaxação da armadura

Para o cálculo da perda por relaxação da armadura deve-se descontar a perda ocorrida pela ancoragem da armadura.

$$\sigma_{pi} = 145,30 - 1,20 = 144,10 \text{ kN/cm}^2 \rightarrow R = \frac{144,10}{190} = 0,76 \quad (8)$$

Para cordoalha de baixa relaxação e com 76% da resistência a tração, na tabela 8.4 da norma NBR 6118:2014 calcula-se através de interpolação o valor para  $\psi_{1000} = 3,10$ .

$$\psi_{(1,0)} = \psi_{1000} \cdot \left(\frac{t-t_0}{41,67}\right)^{0,15} = 3,1 \cdot \left(\frac{1-0}{41,67}\right)^{0,15} = 1,772 \rightarrow \Delta \sigma_{pr} = \frac{1,772}{100} \cdot 144,10 = 2,55 \text{ kN/cm}^2 \quad (9)$$

### Perda por deformação imediata do concreto (aqui considera-se no meio do vão)

Com o sistema de pré-tração com aderência inicial, isso implica que a tensão que atua na deformação imediata do concreto nesta fase é o valor inicial ( $\sigma_p$ ) descontadas as duas perdas calculadas anteriormente. Neste caso consideram-se as perdas para os cabos junto a face superior e inferior separadamente:  $A_p = 9,87 \text{ cm}^2$ ;  $e_p = 38,9 \text{ cm}$ ;  $A'_p = 1,974 \text{ cm}^2$ ;  $e'_p = 40 \text{ cm}$ . Com  $N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A'_p \cdot \sigma_{pi,sup} = 1676,48 \text{ kN}$  e  $M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p + A'_p \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e'_p = 431,69 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

$$\sigma_{pi} = \sigma_p - (\Delta \sigma_{ancor} + \Delta \sigma_{pr}) = 145,30 - (1,20 + 2,55) = 141,50 \text{ kN/cm}^2 \quad (10)$$

$$\Delta \sigma_{cg,inf} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,p0+g,inf} \text{ e } \Delta \sigma_{cg,sup} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,p0+g,sup} \quad (11)$$

$$\sigma_{c,p0+g,inf} = \frac{N_p}{A} + \left(\frac{M_p - M_{g1}}{I}\right) \cdot e_p = 13724 \text{ kN/m}^2 \quad (14)$$

$$\sigma_{c,po+g,sup} = \frac{N_p}{A} + \left( \frac{-M_p + M_{g1}}{I} \right) \cdot e'_p = -1515 \text{ kN/m}^2 \quad (15)$$

Com  $\alpha_p = 7,14$  e  $E_{ci} = 28000 \text{ MPa}$ .

$$\Delta\sigma_{cg,inf} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,inf} = 9,80 \text{ kN/cm}^2 \quad (16)$$

$$\Delta\sigma_{cg,sup} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,sup} = -1,08 \text{ kN/cm}^2 \quad (17)$$

Então, a tensão final considerando as perdas da primeira fase é:

$$\sigma_{p,inf,1 \text{ dia}} = \sigma_p - \Delta\sigma_{anc} - \Delta\sigma_{pr} - \Delta\sigma_{cg,inf} = 145,30 - 1,20 - 2,55 - 9,80 = 131,75 \text{ kN/cm}^2 \quad (18)$$

$$\sigma_{p,sup,1 \text{ dia}} = \sigma_p - \Delta\sigma_{anc} - \Delta\sigma_{pr} - \Delta\sigma_{cg,sup} = 145,30 - 1,20 - 2,55 + 1,08 = 142,63 \text{ kN/cm}^2 \quad (19)$$

Até esse instante as perdas calculadas são de 9,33% para os cabos na borda inferior e de 1,84% para os cabos da borda superior.

### Perdas deferidas

Com o intuito de calcular os elementos necessários para usar as expressões de perda INFORSATO (2009) desenvolve, a partir do anexo A da NBR6118:2014 uma planilha de cálculo no programa Excel. A Figura 4 apresenta a tela de entrada e saída de dados.

Thiago Bindilatti Inforsato	
<b>Dados</b>	
Area da seção de concreto $A_c$	1410
Perimetro da seção em contato com o ar (T)	234
<b>Ambiente e material</b>	
Umidade relativa do ar (U)	70
Temperatura média (T)	20
Abtimento do concreto (slamp)	9
Tipo do cimento utilizado	3
<b>Idade do concreto</b>	
no início do período considerado ( $t_0$ )	45
no final do período considerado (t)	10000
<b>Resultados</b>	
Coefficiente de fluência $\Phi(t,t_0)$	1,728
Retração do concreto $\epsilon_{cs}(t,t_0)$	-2,07E-04

Figura 4 – Tela da planilha desenvolvida por INFORSATO (2009).

Como tem-se dois tipos de concreto, um com cimento tipo ARI para a seção pré-moldada e outro cimento tipo CPII para a capa, é proposto a determinação de dois coeficientes de fluência, um para cada seção e o coeficiente de fluência final é a média ponderada das duas seções. A Figura 5 mostra as duas seções consideradas para a determinação do coeficiente de fluência. O coeficiente  $\phi$  final é obtido pela média ponderada das áreas e os respectivos coeficientes (Tabela 2).

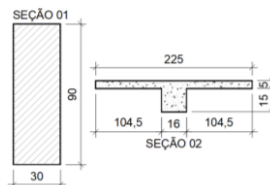


Figura 5 – Seção A e B para a determinação dos coeficientes de fluência.

Tabela 2 – Coeficientes de fluência para a seção A, B e final.

Ação	$t_0$ Seção A	Coefficiente $\phi$ Seção A	$t_0$ Seção B	Coefficiente $\phi$ Seção B	Coefficiente $\phi$ final
Protensão	1	3,304	--	--	3,304
Peso próprio da viga	1	3,304	--	--	3,304

<b>Peso próprio da laje</b>	15	2,225	--	--	2,225
<b>Execução da capa</b>	30	1,940	1	3,783	2,559
<b>Execução da alvenaria</b>	45	1,777	15	2,539	2,033
<b>Execução do revestimento</b>	60	1,660	30	2,15	1,825
<b>Atuação carga acidental</b>	75	1,568	45	1,933	1,691
<b>Perda da protensão</b>	75	1,568	45	1,933	1,691

### Perda por fluência

Inicialmente calcula-se as perdas isoladamente e para o cálculo da fluência usa-se as recomendações de NAWY (1996).

$$\Delta\sigma_{p,c,inf} = \alpha_p \cdot \varphi(t, t_0) \cdot \sigma_{c,po+g,inf} \text{ e } \Delta\sigma_{p,c,sup} = \alpha_p \cdot \varphi(t, t_0) \cdot \sigma_{c,po+g,sup} \quad (20)$$

$$\Delta\sigma_{p,c,inf} = \alpha_p \left\{ \left[ \frac{N_p}{A} + \left( \frac{+M_p - M_{g1}}{I} \right) \cdot e_p \right] \cdot \varphi_1 - \sum_{i=2}^3 \frac{M_{gi} \cdot e_{p'}}{I} \cdot \varphi_i - \sum_{i=4}^5 \frac{M_{gi} \cdot e_{p',comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_i - \psi_2 \frac{M_q \cdot e_{p',comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_q \right\} \quad (21)$$

$$\Delta\sigma_{p,c,sup} = \alpha_p \left\{ \left[ \frac{N_p}{A} + \left( \frac{-M_p + M_{g1}}{I} \right) \cdot e_{p'} \right] \cdot \varphi_1 + \sum_{i=2}^3 \frac{M_{gi} \cdot e_{p'}}{I} \cdot \varphi_i + \sum_{i=4}^5 \frac{M_{gi} \cdot e_{p',comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_i + \psi_2 \frac{M_q \cdot e_{p',comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_q \right\}$$

Que resultam em  $\Delta\sigma_{p,c,inf} = 12,01 \text{ kN/cm}^2$  e  $\Delta\sigma_{p,c,sup} = 7,90 \text{ kN/cm}^2$ .

### Perda por retração do concreto

Para a determinação do coeficiente de retração até a colocação da capa, a seção e geometria a considerar é a da viga pré-moldada. Quando se coloca a capa a geometria seria facilmente calculada, mas já existem dois concretos. Pode-se neste caso determinar uma retração para a seção 01 e outra para a seção 02 (com perímetro só da parte de cima), fazendo-se depois uma composição entre os dois coeficientes de retração. Contudo a parte superior poderá trabalhar com selada (não perfeitamente). Como a protensão está praticamente atuando na seção 01, simplificadamente considera-se apenas a primeira seção para o cálculo do coeficiente de retração (a favor da segurança).

$$\varepsilon_{(10000,1)} = -2,60 \cdot 10^{-4} \rightarrow \Delta\sigma_{p,s} = \varepsilon_{(t,t_0)} \cdot E_p = -2,60 \cdot 10^{-4} \cdot 2,0 \cdot 10^4 = 5,20 \text{ kN/cm}^2 \quad (22)$$

### Relaxação da armadura

Com  $\Delta\sigma_{p,r} = \sigma_{p0} \chi(t, t_0)$ ;  $\chi(t_\infty, t_0) = -\ln[1 - \psi(t_\infty, t_0)]$ ;  $\psi(t_\infty, t_0) = 2,50 \cdot \psi_{1000}$ ;  $R_{inf} = \frac{137,75}{190} = 0,69$ ;  $R_{sup} = \frac{142,63}{190} = 0,75$ .

Conduzindo a:  $\psi(t_\infty, 1)_{inf} = 2,50 \cdot 2,38 = 5,95$ ;  $\psi(t_\infty, 1)_{sup} = 2,50 \cdot 3,00 = 7,50$ , portanto,  $\Delta\sigma_{p,r,inf} = \sigma_{p0} \chi(t_\infty, t_0) = 131,75 \cdot 6,13 \cdot 10^{-2} = 8,08 \text{ kN/cm}^2$  e  $\Delta\sigma_{p,r,sup} = \sigma_{p0} \chi(t_\infty, t_0) = 142,63 \cdot 7,80 \cdot 10^{-2} = 11,12 \text{ kN/cm}^2$ .

### Simultaneidades das perdas

A equação para os cálculos das perdas é dada pela expressão abaixo. A parcela referente ao numerador já foi calculada, restando agora o cálculo do denominador.

$$\Delta\sigma_p(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cs}(t, t_0) E_p - \alpha_p \sigma_{c,po+g} \varphi(t, t_0) - \sigma_{p0} \chi(t, t_0)}{\chi_p + \chi_c \alpha_p \eta \rho_p} \quad (23)$$



Com:  $\chi_{p,inf} = 1 + \chi(t_{\infty}, t_0)_{inf} = 1 + 6,13 \cdot 10^{-2} = 1,06$ ;  $\chi_{p,sup} = 1 + \chi(t_{\infty}, t_0)_{sup} = 1 + 7,80 \cdot 10^{-2} = 1,08$ ;  $\chi_c = 1 + 0,5 \cdot \varphi(t, t_0) = 1 + 0,5 \cdot 3,304 = 2,65$ ;  $\eta_{inf} = 1 + e_p^2 \frac{A_c}{I_c} = 1 + 0,389^2 \frac{0,27}{1,82 \cdot 10^{-2}} = 3,24$ ;  $\eta_{sup} = 1 + e_p'^2 \frac{A_c}{I_c} = 1 + 0,40^2 \frac{0,27}{1,82 \cdot 10^{-2}} = 3,37$ ;  $\rho_p = \frac{A_p}{I_c} = \frac{9,870+1,974}{2700} = 4,39 \cdot 10^{-3}$

Com isso tem-se:

$$\Delta\sigma_p(\infty, t_0)_{inf} = \frac{-5,20-12,01-8,08}{1,06+2,65 \cdot 5,65 \cdot 3,24 \cdot 4,39 \cdot 10^{-3}} = -19,87 \text{ kN/cm}^2 \quad (24)$$

$$\Delta\sigma_p(\infty, t_0)_{sup} = \frac{-5,20-7,90-11,12}{1,08+2,65 \cdot 5,65 \cdot 3,37 \cdot 4,39 \cdot 10^{-3}} = -18,88 \text{ kN/cm}^2 \quad (25)$$

Então chega-se a tensão final nos cabos consideradas todas as perdas.

$$\Delta\sigma_{p,inf,\infty} = \sigma_p - \Delta\sigma_{p,inf} = 131,75 - 19,84 = 111,91 \text{ kN/cm}^2 \quad (26)$$

$$\Delta\sigma_{p,sup,\infty} = \sigma_p - \Delta\sigma_{p,sup} = 142,63 - 18,88 = 123,75 \text{ kN/cm}^2 \quad (27)$$

Chega-se a uma perda de 22,98% para os cabos da borda inferior e 14,85% para os cabos da borda superior, comparado com a tensão inicial  $\sigma_{pi}$ .

### Verificação da fissuração

Após os cálculos das perdas de protensão no tempo infinito, é possível fazer a verificações das tensões. Com  $N_p = A_p \cdot \sigma_{p\infty,inf} + A'_p \cdot \sigma_{p\infty,sup} = 1348,83 \text{ kN}$  e  $M_p = A_p \cdot \sigma_{p\infty,inf} \cdot e_p + A'_p \cdot \sigma_{p\infty,sup} \cdot e'_p = 331,96 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

- Estado limite de formação de fissuras, combinação frequente de  $\psi_1 = 0,6$ , com limites:  $-2924 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Borda inferior:

$$\sigma_i = \frac{1348,83}{0,27} + \frac{331,96}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{7,69 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,6 \cdot 256,67}{7,69 \cdot 10^{-2}} = 7,29 \text{ kN/m}^2 \quad (30)$$

Borda superior:

$$W_{ts} = \frac{I_{comp}}{y_{ts}} = \frac{4,89 \cdot 10^{-2}}{0,264} = 1,85 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \quad (31)$$

$$\sigma_s = \frac{1348,83}{0,27} - \frac{331,96}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{139,03}{1,85 \cdot 10^{-2}} + \frac{0,6 \cdot 256,67}{1,85 \cdot 10^{-2}} = 7757 \text{ kN/m}^2 \quad (32)$$

Como os valores estão dentro do limite a verificação está atendida.

- Estado limite de descompressão, combinação quase permanente frequente de  $\psi_2 = 0,4$ , com limites:  $0 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Borda inferior:

$$\sigma_i = \frac{1348,83}{0,27} + \frac{331,96}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{7,69 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,4 \cdot 256,67}{7,69 \cdot 10^{-2}} = 674 \text{ kN/m}^2 \quad (33)$$

Borda superior:

$$\sigma_s = \frac{1348,83}{0,27} - \frac{331,96}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{139,03}{1,85 \cdot 10^{-2}} + \frac{0,4 \cdot 256,67}{1,85 \cdot 10^{-2}} = 7480 \text{ kN/m}^2 \quad (34)$$

Como os valores estão dentro do limite a verificação está atendida.

### Verificação de ruptura e no tempo zero (verificação de ruptura simplificada).

Para uma melhor análise é recomendada nesta etapa a verificação em décimo de vão, com o carregamento da protensão e do peso próprio do elemento pré-moldado, que resulta nos valores da Tabela 3.

Tabela 3 – Valores das tensões da borda inferior e superior em décimo de vão.

Seção	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>
$\sigma_i$ (kN/m <sup>2</sup> )	14855,13	14300,60	13904,51	13666,85	13587,63
$\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> )	-3137,20	-2582,67	-2186,58	-1948,92	-1869,70



Os limites para este instante são:

$$\text{Compressão} \rightarrow \sigma = 0,7 f_{ckj} = 0,7 \times 25000 = 17500 \text{ kN/m}^2. \quad (35)$$

$$\text{Tração} \rightarrow \sigma = 1,2 \times 0,3 \times f_{ct,m} = 1,2 \times 0,3 \times \sqrt[3]{25^2} = 3,078 \text{ MPa} = 3078 \text{ kN/m}^2. \quad (36)$$

$$- 3078 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 17500 \text{ kN/m}^2$$

O limite de tensão na borda inferior está verificado em todas as seções, a menos da seção S que está entre  $S_1$  e  $S_2$ . Neste caso deve-se ser estudado se esta seção S está contida no comprimento de transferência de protensão. Caso contrário seria feito um isolamento de algum cabo junto a borda inferior, ver INFORSATO (2009).

### Cálculo de $A_p$ no tempo infinito.

Conhecida a armadura longitudinal deve-se calcular o momento máximo resistente da seção. Neste caso no ELU da flexão pode-se considerar a seção trabalhando como um todo. Inicialmente determina-se a posição da linha neutra (LN) a partir do equilíbrio das forças atuantes na seção transversal (Figura 6).

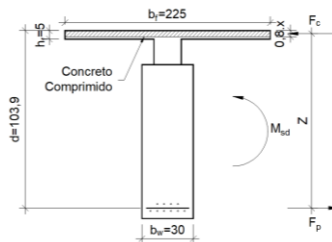


Figura 6 – Seção transversal com a indicação das forças internas, medidas em cm.

Como não há força externa, a força atuante no concreto ( $F_c$ ), deve ser igual a força atuante na armadura ( $F_t$ ).

$$F_c = F_t \rightarrow (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x) = A_p \cdot f_{pd} \quad (37)$$

Uma primeira tentativa impõe que a viga está trabalhando no domínio 2 e que a posição da linha neutra esteja na altura da capa. A expressão da linha neutra é:  $x = \frac{A_p \cdot f_{pd}}{0,68 \cdot b_f \cdot f_{cd}}$ .

A tensão no cabo no tempo infinito de  $\sigma_{p,inf} = 111,91 \text{ kN/cm}^2$ . Determina-se o pré-alongamento da armadura ativa de acordo com CARVALHO (2014) que é de  $\epsilon_p = 5,75\%$ . Com isso tem-se  $\epsilon_t = \epsilon_s + \epsilon_p = 10 + 5,75 = 15,75\%$ . Com este valor tem-se  $\sigma_{sd} = 1501 \text{ MPa}$ . Sendo assim determina-se a posição de linha:  $x = \frac{9,87 \cdot 150,1}{0,68 \cdot 2,25 \cdot \frac{30000}{1,4}} = 4,73 \cdot 10^{-2} = 4,73 \text{ cm} < h_f$ . Com a posição da linha neutra é possível identificar o domínio de deformação que está situada a viga. Para que a viga esteja no domínio 2 a posição da linha neutra LN deve estar entre zero e um determinado valor obtido através das deformações do concreto e do aço.

$$x_2 = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s} \cdot d = \frac{3,5}{3,5 + 10} \cdot 1,039 = 0,2693 \text{ m} = 26,93 \text{ cm} \quad (38)$$

A posição da linha neutra está a 4,73 cm pode-se dizer que a mesma encontra-se no domínio 2. Com o isso o momento resistente é dado por:

$$M_{rest} = F_c \cdot z = (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x) \cdot (d - 0,4 \cdot x) \quad (39)$$

$$M_{rest} = \left(0,85 \cdot \frac{30000}{1,4}\right) \cdot 2,25 \cdot 0,8 \cdot 4,73 \cdot 10^{-2} (1,039 - 0,4 \cdot 4,73 \cdot 10^{-2}) = 1581 \text{ kNm} \quad (40)$$

Considerando os coeficientes de 1,30 para os elementos pré-fabricados, e 1,4 para as demais cargas, tem-se:

$$M_d = 1,3 \cdot (M_{g1} + M_{g2}) + 1,4 \cdot (M_{g3} + M_{g4} + M_{g5} + M_q) = 1058 \text{ kN.m} \quad (41)$$

Como  $M_{\text{resis}} > M_d$  o ELU de flexão está atendido.

## Conclusões

A condição determinante do projeto para o cálculo da armadura longitudinal foi a da verificação de fissuração no estado de descompressão. Também fica claro a necessidade da colocação de armadura de protensão junto a borda superior da seção inicial. Esta condição diz respeito a verificação de ruptura no estado em vazio. Estas duas situações parecem ser típicas da pré-tração e acabam sendo recorrentes. Assim, aconselha-se a iniciar o pré-dimensionamento por estas condições. Frisa-se a questão das perdas que se consideradas de maneira aproximada podem mascarar os resultados principalmente no que diz respeito às condições de fissuração. Para ilustrar este aspecto, calculou-se duas situações (estimativa 1 e estimativa 2) a quantidade de armadura longitudinal (considerando sempre dois cabos junto a fibra superior da pré-viga) usando condição determinante (descompressão na combinação quase permanente). Os resultados obtidos estão indicados na Tabela 4, mostrando a grande variabilidade de solução e a importância da precisão do cálculo das perdas. Nota-se que na estimativa 2 ao verificar a seção em vazio, haveria tração superior ao permitido, requerendo maior quantidade de cabos junto a borda superior.

**Tabela 4 – Número de cabos necessários em função da estimativa da perda de protensão.**

	Perda cabo superior	Perda cabo inferior	nº de cabos necessários	nº de cabos estimado/nº de cabo calculado
<b>Estimativa 1</b>	10%	15%	7	0,70
<b>Estimativa 2</b>	20%	30%	12	1,20
<b>Situação de cálculo</b>	15,45%	22,98%	10	1,00

O método proposto pode ser sistematizado e feito através de planilhas eletrônicas, ou mesmo, através de um programa de computador e assim permitindo uma grande velocidade no cálculo e liberando mais tempo para o projetista para a análise e eventuais mudanças de projeto.

## Referências

- NAWY E.G, P.E. Prestressed concrete. A Fundamental Approach – Second edition. Editora: Prentice Hall – New Jersey, 1996.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 9062: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. Rio de Janeiro, 2017.
- CARVALHO, R. C; FILHO. J. R. F. Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado. Segundo a NBR 6118:2014. 4.ed. São Carlos. EDUFSCAR, 2014. 415 pág.
- INFORSATO, T. B. Considerações sobre o projeto, cálculo e detalhamento de vigas pré-fabricadas protendidas com aderência inicial em pavimentos de edificações. Dissertação de mestrado PPGCIV – UFSCAR, São Carlos. 2009.