

## **Modelagem Numérica de Flexão de Placas Segundo a Teoria de Kirchhoff**

**Daniel Dias Monnerat<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Hiperestática Engenharia e Projetos Ltda. /ddmonnerat@yahoo.com.br

### **Resumo**

A teoria clássica ou teoria de Kirchhoff lida com certas simplificações, destacando-se entre elas o fato de considerar desprezíveis as deformações por cisalhamento transversal, conduz a uma equação diferencial de quarta ordem, satisfazendo duas condições de contorno em cada bordo. Como a determinação da solução analítica para problemas de flexão de placas fica restrita a condições bastante particulares de carregamento e de contorno, deve-se recorrer a métodos aproximados para a solução desses problemas. O presente trabalho consiste, portanto, na aplicação do método das diferenças finitas à análise de placas, segundo a teoria de flexão de Kirchhoff ou teoria clássica. Quando não for possível o emprego do método das diferenças finitas para o cálculo de um determinado esforço no contorno da placa, utilizar-se-á valores conhecidos de pontos próximos para a análise do ponto em estudo, através de expansões em série de Taylor.

### **Palavras-chave**

Teoria de Placas de Kirchhoff; Método das Diferenças Finitas; Série de Taylor.

### **Introdução**

Quando se emprega a teoria clássica ou teoria de Kirchhoff para análise de problemas de flexão de placas, a determinação da solução analítica fica restrita a condições bastante particulares de bordo, formato e carregamento, e mesmo para esses casos as análises são extremamente trabalhosas e complexas (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

Portanto, para a solução destes problemas, deve-se recorrer a métodos aproximados. Neste trabalho procurar-se-á utilizar o método das diferenças finitas (SPERANDIO et al., 2003) para a solução de problemas referentes à flexão de placas.

Assim, as equações diferenciais da teoria de placas serão expressas em termos de fórmulas de diferenças finitas centrais, que conduzem a um menor erro de aproximação em relação às diferenças do tipo regressiva e progressiva, possibilitando que o problema seja resolvido através de um sistema linear de equações algébricas (UGURAL, 1981).

Quando não for possível o emprego do método das diferenças finitas para o cálculo de um determinado esforço do contorno da placa, lançar-se-á mão da série de Taylor (WILLIAMSON et al., 1975), utilizando como base valores conhecidos de pontos próximos para a análise do ponto em estudo.

Alguns exemplos numéricos são analisados e os resultados são comparados com soluções analíticas, mostrando a validade da formulação proposta.

## Teoria Clássica de Flexão de Placas

Placa consiste em um elemento estrutural bidimensional, de superfície média plana e solicitada por cargas transversais, acarretando necessariamente a ocorrência de deslocamentos na direção normal ao plano médio.

Em função da natureza bidimensional da placa, torna-se necessário a introdução de algumas hipóteses simplificadoras, destacando-se entre elas o fato de desprezar as deformações cisalhantes transversais.

Ao se desprezar a deformação por cisalhamento transversal, considera-se que somente a parcela de flexão contribui para a deformação, fazendo com que a equação da placa seja de quarta ordem e satisfaça a apenas duas condições de contorno em cada bordo (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \text{ou} \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

sendo:  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  - rigidez a flexão da placa;

$w$  - deslocamento vertical;

$q$  - carregamento distribuído;

$t$  - espessura;

$E$  - módulo de elasticidade;

$\nu$  - coeficiente de Poisson.

As expressões para momentos fletores e de torção, atuantes na superfície média, são obtidas por integração das tensões ao longo da espessura da placa (RIBEIRO, 1976). Os resultados dessas integrações são apresentados a seguir:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.a)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (2.b)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.c)$$

Para os esforços cortantes, as expressões são dadas por:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3.a)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (3.b)$$

Os esforços solicitantes (momentos e cortantes) são grandezas definidas por unidade de comprimento ao longo da superfície média da placa.

## Método das Diferenças Finitas Aplicada a Teoria Clássica de Flexão de Placas

O método das diferenças finitas consiste na aproximação das derivadas de uma função, em uma equação diferencial qualquer, através de fórmulas de diferenças equivalentes. O problema em questão se reduz a solução simultânea de um conjunto de equações algébricas, escritas para todos os pontos nodais da superfície analisada.

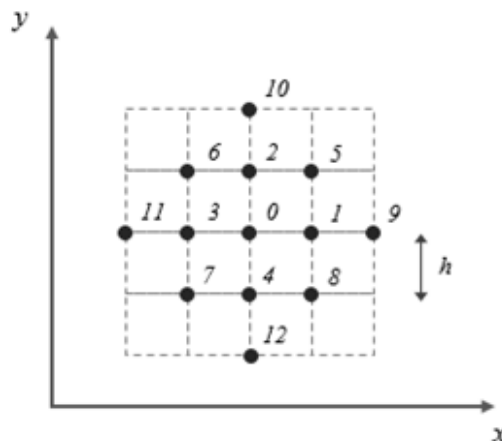
Conhecendo os operadores de diferenças finitas para as diversas ordens de derivadas parciais, pode-se transformar a equação diferencial de flexão de placas em uma equação algébrica (UGURAL, 1981).

Assim, para a equação diferencial de quarta ordem de flexão de placas (Equação 1), tem-se:

$$\left[ w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12} + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 20w_0 \right] \frac{1}{h^4} = \frac{q}{D}, \quad (4)$$

sendo:  $h$  - distância entre pontos (incremento).

O valor de  $w_i$  representa o deslocamento vertical no ponto  $i$  da malha de pontos apresentada na (Figura 1).



**Figura 1 – Malha de pontos.**

Expressões similares podem ser escritas para todos os pontos nodais da placa (domínio e contorno). Neste caso, as condições de contorno (deslocamentos, rotações, curvaturas e/ou esforços) devem ser convertidas para formas de diferenças finitas, em função do tipo de bordo utilizado. As Equações 2 e 3, para os esforços solicitantes (momentos e cortantes), são expressas em termos de diferenças finitas pelas seguintes equações:

Momentos fletores e de torção:

$$M_x = \frac{D}{h^2} \left[ (2w_0 - w_3 - w_1) + \nu(2w_0 - w_4 - w_2) \right], \quad (5.a)$$

$$M_y = \frac{D}{h^2} \left[ (2w_0 - w_2 - w_4) + \nu(2w_0 - w_3 - w_1) \right], \quad (5.b)$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{4h^2} (-w_5 + w_6 - w_7 + w_8). \quad (5.c)$$

Esforços cortantes:

$$Q_x = -\frac{D}{2h^3}(w_9 - w_{11} - 4w_1 + 4w_3 - w_5 - w_6 + w_8 - w_7), \quad (6.a)$$

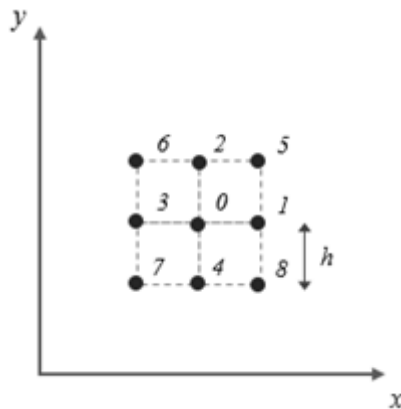
$$Q_y = -\frac{D}{2h^3}(w_5 + w_6 - 4w_2 + 4w_4 - w_8 - w_7 + w_{10} - w_{12}). \quad (6.b)$$

### Aplicação da Série de Taylor para o Cálculo dos Esforços em Alguns Pontos do Contorno

Para a obtenção dos esforços em algumas regiões do contorno da placa, especialmente nos cantos, não há número suficiente de pontos para a aplicação das fórmulas de diferenças finitas.

Para esses pontos os esforços são calculados através de expansões em série de Taylor, tomando como base esforços em pontos próximos conhecidos, que foram calculados através da aplicação de fórmulas de diferenças finitas.

Assim, sejam os pontos discretizados na Figura 2, onde se deseja calcular o valor de uma função qualquer em um ponto de coordenada  $(x, y)$  localizado fora da região delimitada, utilizando como base um ponto conhecido (ponto  $0$ ) de coordenada  $(x_0, y_0)$ .



**Figura 2 – Pontos base.**

Para os esforços solicitantes (momentos fletores, momento de torção e cortantes) têm-se as seguintes equações:

Momentos fletores e de torção:

$$M_x = M_{x,0} + \frac{x-x_0}{2h}(M_{x,1} - M_{x,3}) + \frac{y-y_0}{2h}(M_{x,2} - M_{x,4}) + \frac{(x-x_0)^2}{2h^2}(M_{x,1} - 2M_{x,0} + M_{x,3}) + \frac{(y-y_0)^2}{2h^2}(M_{x,2} - 2M_{x,0} + M_{x,4}) + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{4h^2}(M_{x,5} - M_{x,6} - M_{x,8} + M_{x,7}), \quad (7.a)$$

$$M_y = M_{y,0} + \frac{x-x_0}{2h}(M_{y,1} - M_{y,3}) + \frac{y-y_0}{2h}(M_{y,2} - M_{y,4}) + \frac{(x-x_0)^2}{2h^2}(M_{y,1} - 2M_{y,0} + M_{y,3}) + \frac{(y-y_0)^2}{2h^2}(M_{y,2} - 2M_{y,0} + M_{y,4}) + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{4h^2}(M_{y,5} - M_{y,6} - M_{y,8} + M_{y,7}) \quad (7.b)$$

$$M_{xy} = M_{xy,0} + \frac{x-x_0}{2h}(M_{xy,1} - M_{xy,3}) + \frac{y-y_0}{2h}(M_{xy,2} - M_{xy,4}) + \frac{(x-x_0)^2}{2h^2}(M_{xy,1} - 2M_{xy,0} + M_{xy,3}) + \frac{(y-y_0)^2}{2h^2}(M_{xy,2} - 2M_{xy,0} + M_{xy,4}) + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{4h^2}(M_{xy,5} - M_{xy,6} - M_{xy,8} + M_{xy,7}) \quad (7.c)$$

Esforços cortantes:

$$Q_x = Q_{x,0} + \frac{x-x_0}{2h}(Q_{x,1} - Q_{x,3}) + \frac{y-y_0}{2h}(Q_{x,2} - Q_{x,4}) + \frac{(x-x_0)^2}{2h^2}(Q_{x,1} - 2Q_{x,0} + Q_{x,3}) + \frac{(y-y_0)^2}{2h^2}(Q_{x,2} - 2Q_{x,0} + Q_{x,4}) + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{4h^2}(Q_{x,5} - Q_{x,6} - Q_{x,8} + Q_{x,7}) \quad (8.a)$$

$$Q_y = Q_{y,0} + \frac{x-x_0}{2h}(Q_{y,1} - Q_{y,3}) + \frac{y-y_0}{2h}(Q_{y,2} - Q_{y,4}) + \frac{(x-x_0)^2}{2h^2}(Q_{y,1} - 2Q_{y,0} + Q_{y,3}) + \frac{(y-y_0)^2}{2h^2}(Q_{y,2} - 2Q_{y,0} + Q_{y,4}) + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{4h^2}(Q_{y,5} - Q_{y,6} - Q_{y,8} + Q_{y,7}) \quad (8.b)$$

Só é possível a utilização da série de Taylor até o seu termo de segunda ordem, visto que a ampliação da série acima da segunda ordem implicará no mesmo problema encontrado na aplicação das fórmulas de diferenças finitas, ou seja, a insuficiência de pontos.

### Aplicações Numéricas

Alguns exemplos numéricos de placas são analisados e os resultados obtidos são comparados com as soluções analíticas, mostrando a validade da formulação proposta.

#### Placa Quadrada Apoiada Submetida a um Carregamento Distribuído em Trecho

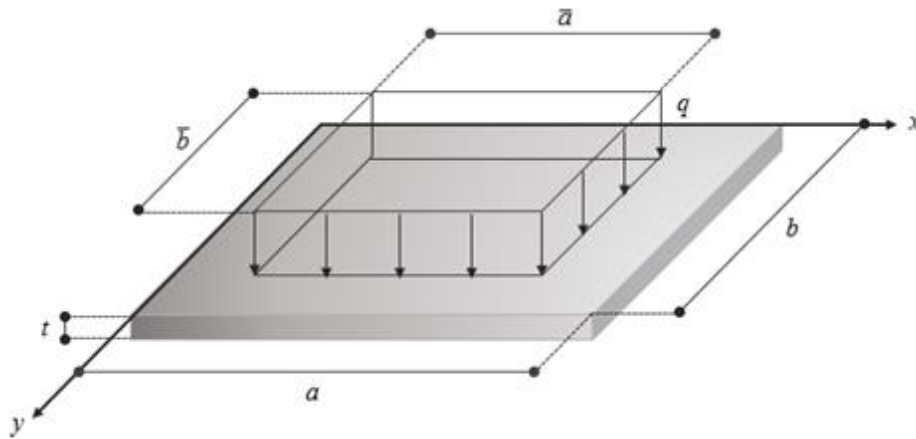
Nesta aplicação numérica, uma placa com os bordos apoiados é submetida a um carregamento distribuído em trecho na região central (Figura 3). As propriedades da placa são:  $a = b = 4,0 \text{ m}$ ,  $\bar{a} = \bar{b} = 2,0 \text{ m}$ ,  $t = 0,10 \text{ m}$ ,  $q = 1,5 \text{ kN/m}^2$ ,  $E = 2,1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  e  $\nu = 0,25$ .

A solução aproximada, utilizando o método das diferenças finitas, é obtida para três diferentes incrementos  $h$ :  $0,10 \text{ m}$ ,  $0,05 \text{ m}$  e  $0,025 \text{ m}$ .

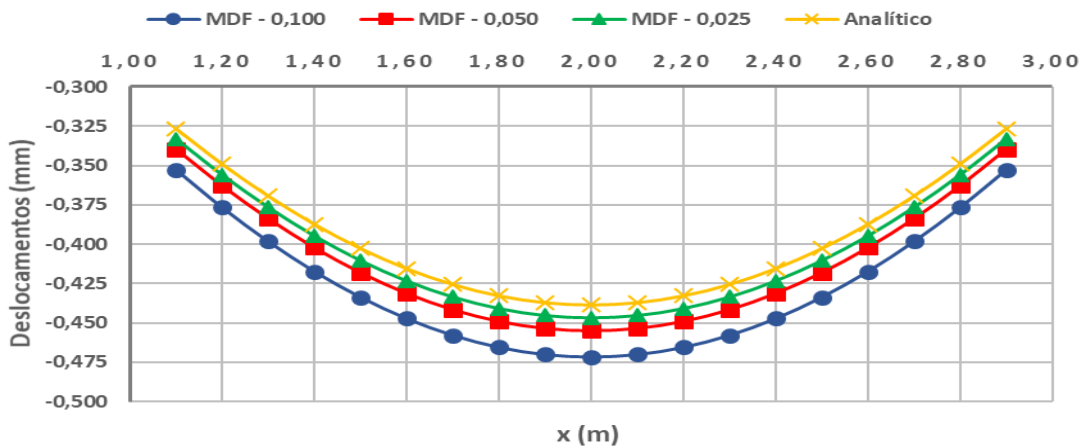
A solução analítica utilizando o método de Navier pode ser obtida em TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959.

Os resultados obtidos para os deslocamentos verticais, momentos fletores e esforços cortantes na seção transversal da placa de coordenada  $y = 2,0 \text{ m}$ , são apresentados nas

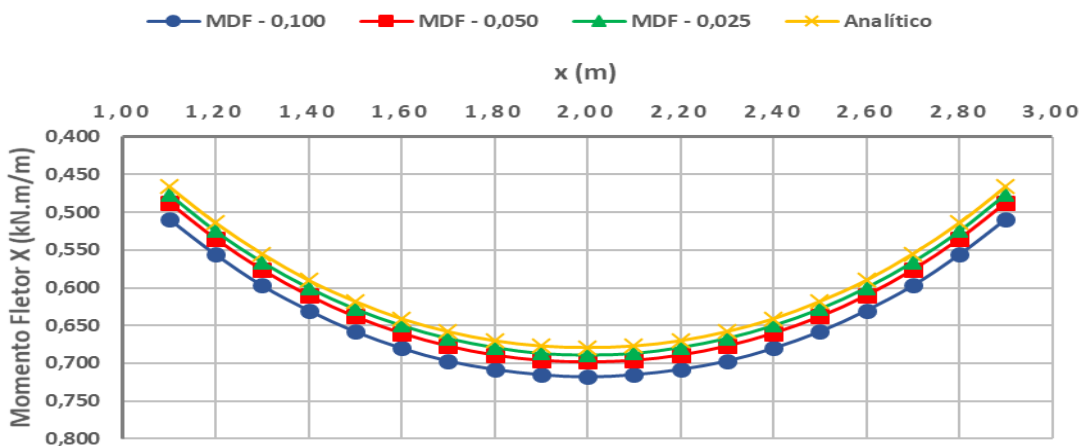
Figuras 4 a 7.



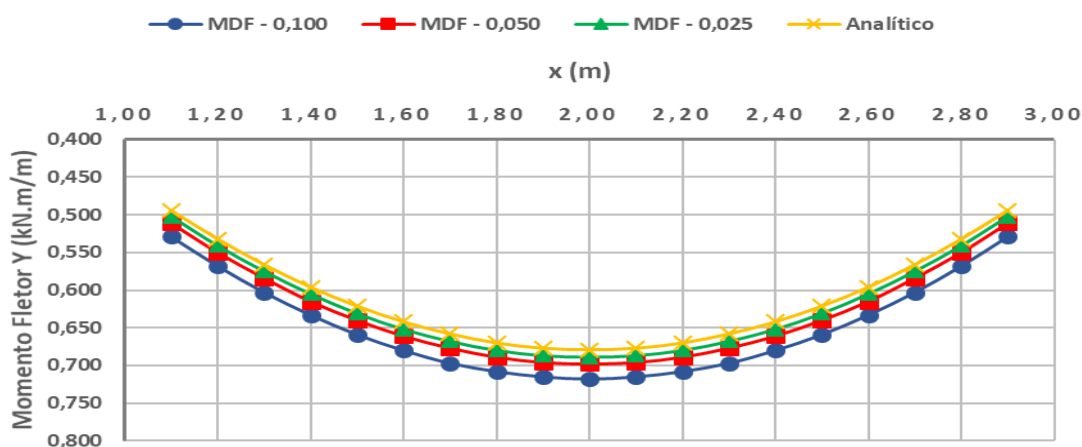
**Figura 3 - Dimensões geométricas e carregamento.**



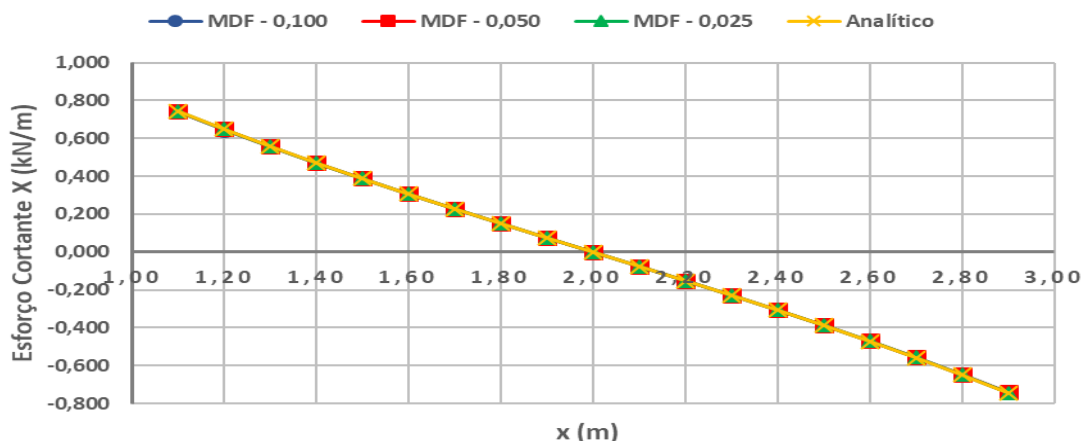
**Figura 4 - Comparação entre os valores obtidos para os deslocamentos verticais.**



**Figura 5 - Comparação entre os valores obtidos para os momentos fletores x.**



**Figura 6 - Comparação entre os valores obtidos para os momentos fletores y.**



**Figura 7 - Comparação entre os valores obtidos para o esforço cortante x.**

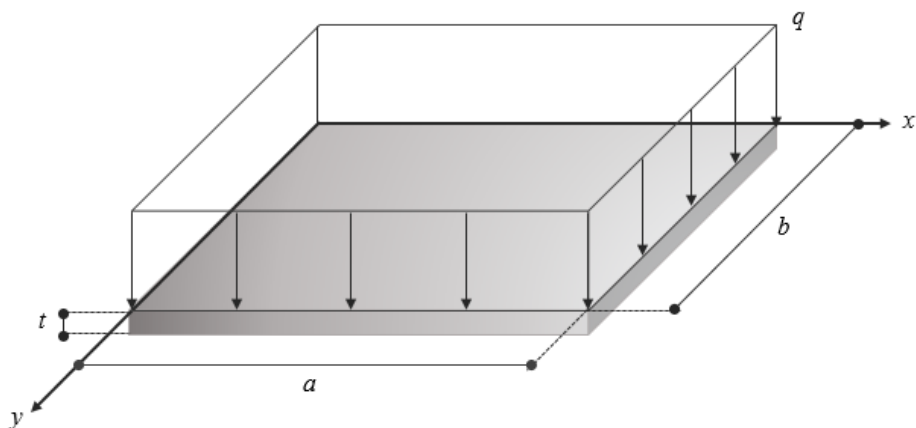
Os valores dos esforços cortantes y são nulos e, portanto, não são apresentados. Comparando os resultados apresentados, verifica-se que os valores obtidos são satisfatórios quando comparado com a solução analítica. Pode-se verificar, também, a convergência dos resultados, à medida que a malha de pontos é refinada.

### **Placa Retangular Simplesmente Apoiada Submetida a um Carregamento Uniformemente Distribuído – Emprego da Série de Taylor**

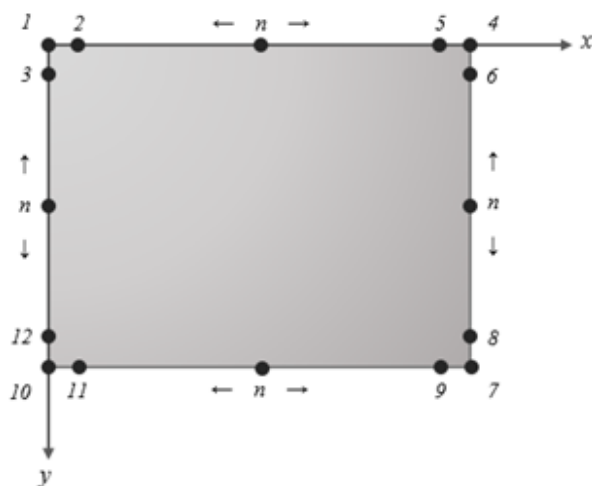
Neste exemplo numérico, uma placa com os bordos simplesmente apoiados é submetida a um carregamento uniforme (Figura 8). As propriedades da placa são:  $a = 6,0 \text{ m}$ ,  $b = 4,0 \text{ m}$ ,  $t = 0,08 \text{ m}$ ,  $q = 1,5 \text{ kN/m}^2$ ,  $E = 2,1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  e  $\nu = 0,20$ .

Para a obtenção dos esforços (momentos e cortantes) em alguns pontos da região do contorno da placa, especialmente nos cantos, não há número suficiente de pontos discretizados para a aplicação direta das equações de diferenças finitas.

Para esses pontos, os esforços serão calculados através de expansões em série de Taylor, tomando como base esforços em pontos próximos conhecidos. A Figura 9 indica quais pontos e esforços serão calculados aplicando expansões em série de Taylor.



**Figura 8 - Dimensões geométricas e carregamento.**



Pontos	Esforços
1, 4, 7 e 10	Momentos Fletores Momento de Torção Esforços Cortantes
2, 3, 5, 6, 8, 9, 11 e 12	Momento de Torção Esforços Cortantes
$n$ (*)	Esforços Cortantes

(\*)  $n$  corresponde a todos os pontos sobre os contornos apoiados.

**Figura 9 – Pontos de aplicação da série de Taylor.**

São apresentadas a seguir, as comparações entre os resultados obtidos para os pontos indicados na Figura 9, utilizando expansões em série de Taylor (obtidos para um incremento de  $0,10\text{ m}$ ) e a solução analítica. A solução analítica em uma placa retangular submetida a um carregamento uniformemente distribuído, utilizando o método de Navier, é apresentada em TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959.

A análise dos momentos fletores e de torção para os pontos indicados na Figura 9, utilizando expansões em série de Taylor, são apresentados nas tabelas a seguir.

**Tabela 1 – Momentos fletores com o emprego da série de Taylor.**

Ponto	Coordenadas (m)		Momentos Fletores (kN.m/m)				Erro Absoluto	
			Série de Taylor		Analítico			
			$M_x$	$M_y$	$M_x$	$M_y$		
1	0,00	0,00	-0,003	-0,003	0,000	0,000	0,003	0,003
4	6,00	0,00	-0,003	-0,003	0,000	0,000	0,003	0,003
7	6,00	4,00	-0,003	-0,003	0,000	0,000	0,003	0,003
10	0,00	4,00	-0,003	-0,003	0,000	0,000	0,003	0,003



**Tabela 2 – Momento de torção com o emprego da série de Taylor.**

Ponto	Coordenadas (m)		Momento Torsor (kN.m/m)		Erro	
	x	y	Série de Taylor	Analítico	Absoluto	Relativo (%)
			$M_{xy}$	$M_{xy}$		
1	0,00	0,00	-1,1780	-1,1776	-0,0004	0,034
2	0,05	0,00	-1,1750	-1,1754	0,0004	-0,034
3	0,00	0,05	-1,1750	-1,1751	0,0001	-0,009
4	6,00	0,00	1,1780	1,1776	0,0004	0,034
5	5,95	0,00	1,1750	1,1754	-0,0004	-0,034
6	6,00	0,05	1,1750	1,1751	-0,0001	-0,009
7	6,00	4,00	-1,1780	-1,1776	-0,0004	0,034
8	6,00	3,95	-1,1750	-1,1751	0,0001	-0,009
9	5,95	4,00	-1,1750	-1,1754	0,0004	-0,034
10	0,00	4,00	1,1780	1,1776	0,0004	0,034
11	0,05	4,00	1,1750	1,1754	-0,0004	-0,034
12	0,00	3,95	1,1750	1,1751	-0,0001	-0,009

Os esforços cortantes devem ser calculados através de expansões em série de Taylor em todos os pontos do contorno. Sendo a placa simétrica, os resultados dos esforços cortantes serão analisados para apenas um quarto da mesma. São apresentados na Tabela 3 os resultados dos esforços cortante calculados no apoio de coordenada  $y = 0,0$  m.

**Tabela 3 – Esforço cortante com o emprego da série de Taylor.**

Coordenadas (m)		Esforços Cortantes (kN/m)				Erro			
x	y	Série de Taylor		Analítico		Absoluto		Relativo (%)	
		$Q_x$	$Q_y$	$Q_x$	$Q_y$	$Q_x$	$Q_y$	$Q_x$	$Q_y$
0,00	0,00	0,055	0,055	0,000	0,000	0,055	0,055	-	-
0,10	0,00	-0,001	0,397	0,000	0,400	0,001	0,003	-	0,756
0,20	0,00	-0,002	0,670	0,000	0,669	0,002	0,001	-	0,149
0,30	0,00	-0,001	0,889	0,000	0,888	0,001	0,001	-	0,112
0,40	0,00	-0,001	1,076	0,000	1,075	0,001	0,001	-	0,093
0,50	0,00	0,000	1,240	0,000	1,238	0,000	0,002	-	0,161
0,60	0,00	0,000	1,384	0,000	1,382	0,000	0,002	-	0,145
0,70	0,00	0,000	1,512	0,000	1,511	0,000	0,001	-	0,066
0,80	0,00	0,000	1,628	0,000	1,626	0,000	0,002	-	0,123
0,90	0,00	0,000	1,732	0,000	1,731	0,000	0,001	-	0,058
1,00	0,00	0,000	1,826	0,000	1,825	0,000	0,001	-	0,055
1,10	0,00	0,000	1,911	0,000	1,910	0,000	0,001	-	0,052
1,20	0,00	0,000	1,988	0,000	1,987	0,000	0,001	-	0,050
1,30	0,00	0,000	2,059	0,000	2,057	0,000	0,002	-	0,097
1,40	0,00	0,000	2,122	0,000	2,121	0,000	0,001	-	0,047
1,50	0,00	0,000	2,180	0,000	2,178	0,000	0,002	-	0,092
1,60	0,00	0,000	2,232	0,000	2,230	0,000	0,002	-	0,090
1,70	0,00	0,000	2,279	0,000	2,277	0,000	0,002	-	0,088
1,80	0,00	0,000	2,321	0,000	2,320	0,000	0,001	-	0,043
1,90	0,00	0,000	2,359	0,000	2,357	0,000	0,002	-	0,085
2,00	0,00	0,000	2,392	0,000	2,391	0,000	0,001	-	0,042

Coordenadas (m)		Esforços Cortantes (kN/m)				Erro			
		Série de Taylor		Analítico		Absoluto		Relativo (%)	
x	y	Q <sub>x</sub>	Q <sub>y</sub>	Q <sub>x</sub>	Q <sub>y</sub>	Q <sub>x</sub>	Q <sub>y</sub>	Q <sub>x</sub>	Q <sub>y</sub>
2,10	0,00	0,000	2,422	0,000	2,421	0,000	0,001	-	0,041
2,20	0,00	0,000	2,448	0,000	2,447	0,000	0,001	-	0,041
2,30	0,00	0,000	2,471	0,000	2,470	0,000	0,001	-	0,040
2,40	0,00	0,000	2,490	0,000	2,489	0,000	0,001	-	0,040
2,50	0,00	0,000	2,507	0,000	2,505	0,000	0,002	-	0,080
2,60	0,00	0,000	2,520	0,000	2,519	0,000	0,001	-	0,040
2,70	0,00	0,000	2,530	0,000	2,529	0,000	0,001	-	0,040
2,80	0,00	0,000	2,537	0,000	2,536	0,000	0,001	-	0,039
2,90	0,00	0,000	2,541	0,000	2,540	0,000	0,001	-	0,039
3,00	0,00	0,000	2,543	0,000	2,541	0,000	0,002	-	0,079

Com base nos resultados acima apresentados, pode-se verificar que os cálculos dos esforços cortantes nos pontos de canto apresentaram erros maiores quando comparados as suas respectivas soluções analíticas. Contudo, para os demais esforços calculados através do emprego da série de Taylor os resultados foram satisfatórios.

### Conclusões

A análise de placas através da aplicação do método das diferenças finitas, foi considerada satisfatória em virtude dos resultados obtidos com os diversos exemplos apresentados, uma vez que as respostas praticamente coincidiram com os valores analíticos apresentados. Verificou-se ainda a convergência do método com o refinamento da malha, ou seja, utilizando-se um maior número de pontos.

Quanto ao emprego de expansões em série de Taylor para o cálculo dos esforços solicitantes em pontos do contorno, especialmente nas regiões dos cantos, onde o método das diferenças finitas não pode ser aplicado, verificou-se que os resultados obtidos, quando comparados com as suas respectivas soluções analíticas, apresentam erros muito pequenos.

Assim, o método das diferenças finitas aliado as expansões em série de Taylor, constituem um importante instrumento para a análise de flexão de placas, mesmo quando o número de pontos empregados é reduzido.

### Referências

- RIBEIRO, J.R.M. Estudo da Validade da Hipótese de Kirchhoff-Love na Teoria de Placas. Dissertação de Mestrado (M.Sc), COPPE / UFRJ, 1976.
- SPERANDIO, D.; MENDES, J.T.; SILVA, L.H.M. Cálculo Numérico – Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos. Pearson Prentice Hall, 2003.
- TIMOSHENKO, S.P. and WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill Kogakusha Ltda, 1959.
- UGURAL, A.C. Stresses in Plates and Shells. McGraw-Hill Book Co., 1981.
- WILLIAMSON, R.E.; CROWELL, R.H.; TROTTER, H.F. Cálculo de Funções Vetoriais. LTC Editora S/A, 1975.