

Otimização Paramétrica e de Forma de Treliças Espaciais Modeladas com Curvas de Bézier

Waldy J. Torres Z¹, Mario P. Rivero G² e Anderson Pereira³

¹PUC Rio de Janeiro / Depto. de Engenharia Mecânica / wtorres19@aluno.puc-rio.br

²KORDOUT Rio de Janeiro / Depto. de Engenharia / m.rivero@kordout.com

³PUC Rio de Janeiro / Depto. de Engenharia Mecânica / anderson@puc-rio.br

Resumo

O projeto de uma estrutura não implica somente o cumprimento dos requisitos de segurança, resistência, funcionalidade, custo total de construção e de operação da estrutura, como também a sua capacidade de atingir todos os objetivos definidos. Tradicionalmente, o desenvolvimento de um projeto estrutural baseia-se no conhecimento científico, o conhecimento empírico e na experiência da equipe de engenharia. O objetivo deste trabalho é apresentar uma metodologia computacional capaz de encontrar a forma ótima de treliças espaciais, por meio da implementação numérica da otimização de forma e o uso de curvas paramétricas. As restrições de tensão de escoamento e tensão crítica de Euler devem ser satisfeitas para considerar que a forma determinada seja considerada ótima. Um exemplo de estrutura reticulada de grande porte é apresentado a fim de validar a *performance* e a aplicabilidade da metodologia implementada.

Palavras-chave

Otimização estrutural; Treliças espaciais; Otimização de forma; Curvas Paramétricas.

Introdução

As estruturas espaciais têm sido uma área ativa de pesquisa desde o início da década de 60[1]. A forma e o comportamento das estruturas espaciais tornam este tipo de estrutura atraente na arte da construção de fachadas, coberturas, auditórios, cenários esportivos e aeroportos, permitindo o desenvolvimento de projetos arquitetônicos diferenciados. Exemplos deste tipo de estruturas são apresentados na Figura 1.

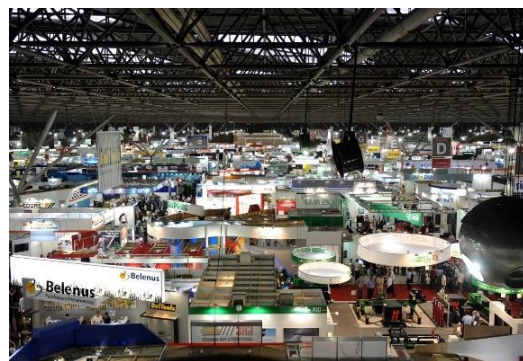


Figura 1. Exemplos de Estruturas Espaciais Treliçadas. (a) Aeroporto Internacional Salgado Filho - Porto Alegre – RS [2]. (b) Centro de Convenções de Anhembi - São Paulo – SP [3].

O termo “otimização” é frequentemente utilizado na área de projeto para considerar que um modelo projetado cumpre com os requisitos estabelecidos, na maioria das vezes, os projetistas desconhecem quais outras configurações ou arranjos do projeto possibilitam soluções alternativas e eficientes para determinado problema. Segundo Arora [4], “otimização” consiste em se formular o problema de engenharia como um problema de otimização, onde uma medida de desempenho é maximizada ou minimizada, satisfazendo os requisitos de projeto. A Figura 2 apresenta um diagrama de fluxo com a comparação entre a metodologia implementada tradicionalmente na área de projeto e a metodologia considerando o mesmo problema como um problema de otimização.

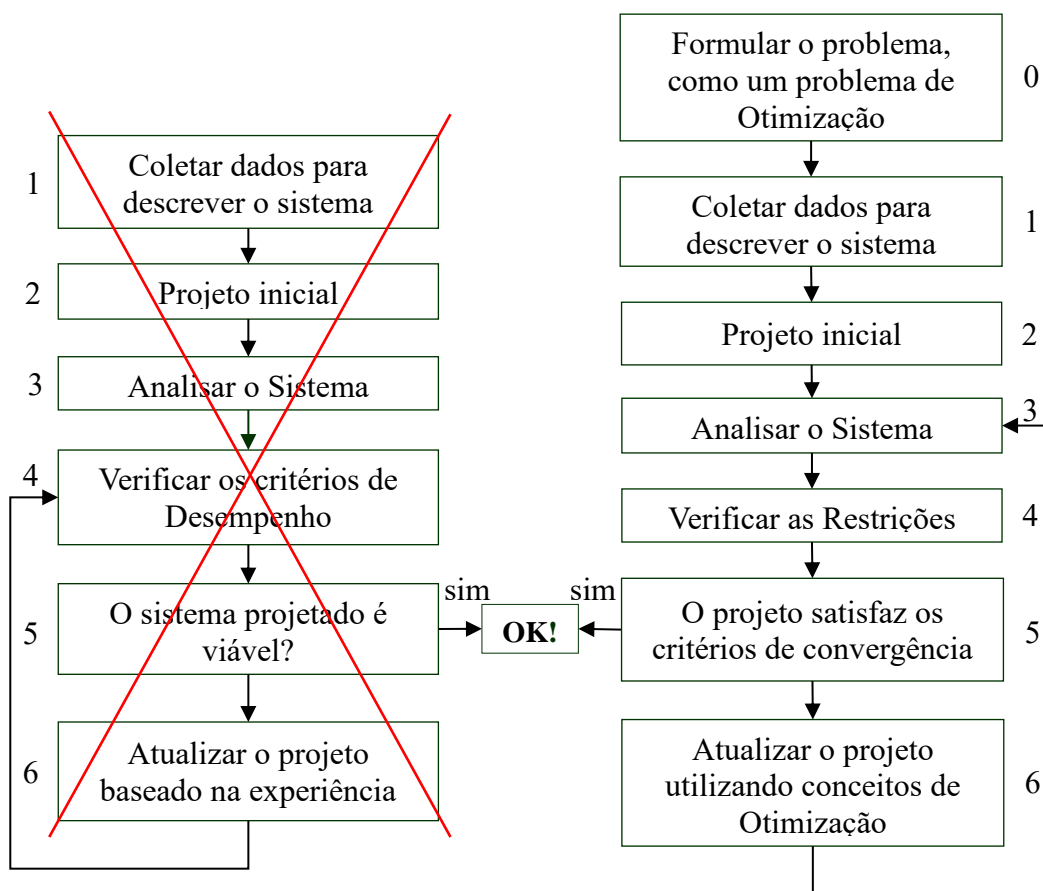


Figura 2. Comparação das Metodologias na Área de Projeto. (a) Metodologia Convencional de Projeto [4]. (b) Metodologia de Otimização de Projeto [4].

O presente trabalho propõe uma metodologia computacional que permita a determinação de formas eficientes em treliças espaciais com base nos conceitos de programação matemática e parametrização de curvas de Bezier. Para finalizar, apresentará um modelo de estrutura paramétrica otimizada.

Definição da Curva Paramétrica

O uso de curvas paramétricas é importante em diversas áreas, pois permitem modelar e visualizar os fenômenos físicos e científicos. Sua principal vantagem consolida-se na possibilidade de construir algoritmos eficientes e numericamente robustos [5].

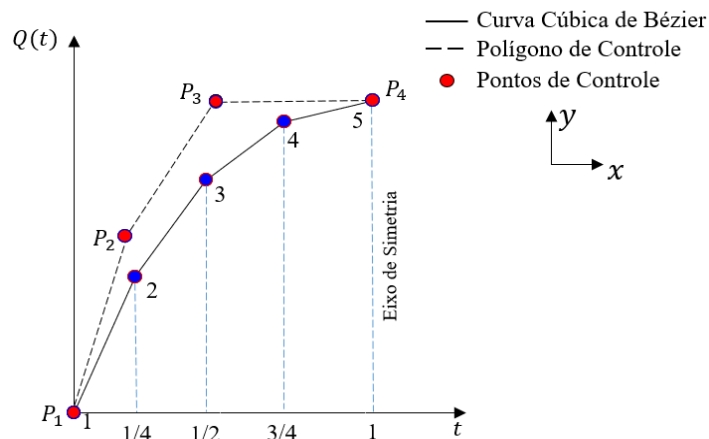


Figura 3 – Curva de Bezier.

Na Figura 3, observa-se a parametrização da curva de Bézier que passa pelos pontos de controles extremos P_1 e P_4 , a determinação da forma é dada pelos pontos de controles intermediários P_2 e P_3 , podendo ser gerada por um polinômio de grau n . Comumente, são usadas curvas de Bézier quadráticas ou cúbicas, já que polinômios de graus maiores são computacionalmente mais custosos de calcular. Uma curva cúbica de Bézier pode ser definida matricialmente da seguinte forma:

$$Q(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} & P_{1y} \\ P_{2x} & P_{2y} \\ P_{3x} & P_{3y} \\ P_{4x} & P_{4y} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Onde para gerar n pontos entre o ponto de controle inicial P_1 e o ponto de controle final P_4 , é necessário dividir o espaço paramétrico t em $n - 1$ intervalos de pontos compreendidos $0 \leq t \leq 1$. Na equação (1), $Q(t)$ representa as coordenadas cartesianas dos pontos interpolados no espaço paramétrico t [6].

Modelagem da Estrutura Paramétrica

Antes de iniciar o processo de otimização é necessário preparar a geometria a ser analisada. As coordenadas em x e y dos quatro pontos de controles são definidas e com o uso da equação (1), determinam-se as novas coordenadas a_i interpoladas no espaço paramétrico como é exibido na Figura 4. As posições nodais do banzo inferior e banzo superior são obtidos por meio das seguintes equações:

$$p_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \quad (2)$$

$$p_{i+1} = a_i + \frac{da_i/dt}{\|da_i/dt\|} h \quad (3)$$

Sendo que $\|da_i/dt\|$ é a norma do vetor tangente no ponto a_i e h é a altura entre o banzo inferior e superior.

O número total de nós e elementos na estrutura podem ser determinados como é indicado nas equações (4) e (5):

$$N_{node} = 2(n + 1) + 1 \quad (4)$$

$$N_{El} = 4(n + 1) - 1 \quad (5)$$

Onde n é o número de divisões do espaço paramétrico.

Na etapa final, para obter a forma da estrutura é necessário estabelecer a conectividade entre os nós como se ilustra na Figura 4.

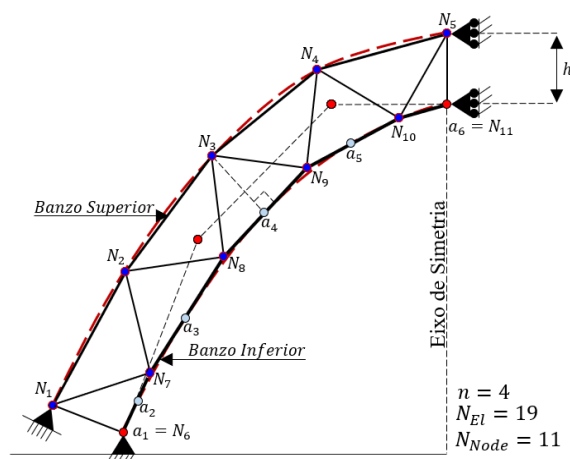


Figura 4 – Estrutura Paramétrica.

Formulação do Problema de Otimização

A solução de um problema de otimização é determinada através dos fundamentos da programação matemática, área que trata dos problemas de minimização ou maximização de funções, ocupando-se do tratamento teórico e desenvolvimento de algoritmos para a sua solução. Um problema de programação matemática pode ser escrito como [7]:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\
 \text{s. t.} \quad & h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad k = 1 \dots m \\
 & g_l(\mathbf{x}) \leq 0 \quad l = 1 \dots p \\
 & x_i^{lb} \leq x_i \leq x_i^{ub} \quad i = 1 \dots n
 \end{aligned} \tag{6}$$

Onde $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo a ser minimizada, $h_k(\mathbf{x})$ e $g_l(\mathbf{x})$ são as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. Por outro lado, as restrições laterais x_i^{lb} e x_i^{ub} que definem a região de possível solução do problema de otimização estão compreendidas no intervalo mínimo e máximo das variáveis de projeto x_i .

Neste trabalho a função objetivo é representada como a massa total da estrutura:

$$f(\mathbf{x}) = m_T = \sum_{i=1}^{N_{El}} \rho_i A_i L_i \tag{7}$$

Onde N_{El} é o número total de barras, ρ_i é a densidade do material, A_i e L_i são áreas das seções transversais e comprimentos de cada elemento de barra respectivamente.

As quantidades numéricas que possibilitam a mudança de parâmetros em um problema de otimização são chamadas de variáveis de projeto, que podem ser: pontos de controle da curva de Bézier; coordenadas nodais; módulo de elasticidade e seções transversais de cada membro da estrutura.

Neste trabalho foram consideradas 8 variáveis de projeto, sendo que 7 variáveis de projeto são independentes e 1 variável de projeto dependente. Estabelecidas da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \{A_{binf}, A_{bsup}, A_{diag}, P_2^x, P_2^y, P_3^x, P_3^y, P_4^y\} \tag{8}$$

Nos quais, os grupos A_{binf} , A_{bsup} e A_{diag} são variáveis que armazenam as seções transversais do banzo inferior, banzo superior e diagonais dos membros estruturais, como demonstrado na Figura 5.

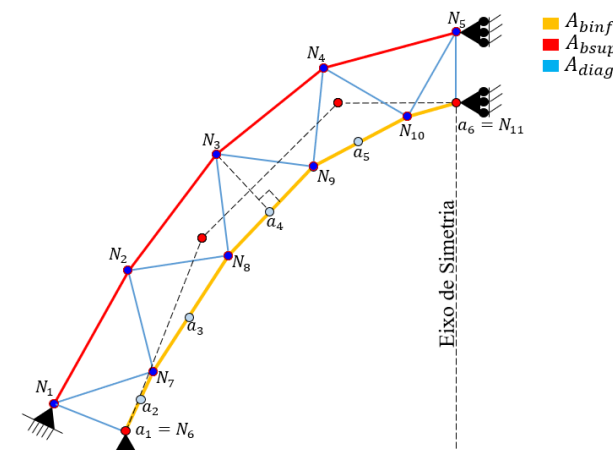


Figura 5 – Grupos de Áreas.

E as variáveis de projeto P_2^x até P_4^y da equação (8), são definidas como a variação dos pontos de controle nas direções x e y . Sendo que os pontos de controle P_3^y e P_4^y tem alturas iguais.

$$P_3^y = P_4^y = P_3^y - P_4^y = 0 \quad (9)$$

As restrições de desigualdade são definidas de maneira normalizada como:

$$g_l(\mathbf{x}) = \frac{|\sigma_i(\mathbf{x})|}{\sigma_i^a(\mathbf{x})} - 1 \leq 0 \quad (10)$$

Onde σ_i é a tensão axial do elemento i e σ_i^a é a tensão admissível. Para $\sigma_i > 0$, elementos tracionados, $\sigma_i^a = \sigma_i^T$, onde σ_i^T é a tensão admissível à tração. Para elementos comprimidos, $\sigma_i < 0$, $\sigma_i^a(\mathbf{x}) = \min[\sigma_i^c, \sigma_i^{cr}(\mathbf{x})]$, onde σ_i^c é a tensão admissível à compressão e σ_i^{cr} é a tensão crítica de Euler, dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_i^{cr}(\mathbf{x}) = \frac{\pi^2 E_i I}{A_i l_i^2} \quad (11)$$

Sendo E_i o módulo de elasticidade do material, l_i o comprimento de cada barra.

Neste trabalho são usadas barras tubulares circulares de alumínio onde para um raio médio R_m e espessura t_s pode-se escrever a área e a inércia como segue:

$$A_i = 2\pi t_s R_m \quad (12)$$

$$I = \frac{\pi R_m t_s}{4} (4R_m^2 + t_s^2) \quad (13)$$

Algoritmo de Otimização

Algoritmos de otimização para problemas de programação linear tem solução em um número finito de passos. Neste trabalho utilizou-se a função `fmincon` do Matlab® que auxilia na busca do mínimo da função objetivo sujeita a restrições como é descrito na formulação do problema de otimização. O uso da função `fmincon` emprega sequencialmente, o algoritmo de Pontos Interiores (PI), que pertencente à classe dos métodos gradientes [8], requerendo que seja especificado os gradientes analíticos da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto para determinar a direção de busca do processo de otimização.

De forma geral, a derivada da função objetivo e das restrições são obtidas a partir do gradiente da resposta da estrutura quando esta encontra-se submetida a carregamentos estáticos.

Análises de Sensibilidade

Análises da sensibilidade, também chamada de gradientes das respostas da estrutura, tem como objetivo verificar o comportamento da função objetivo e das restrições quando

se aplica uma pequena perturbação em uma determinada variável de projeto, consequentemente se determina sua influência no problema de otimização.

A sensibilidade da função objetivo $f(\mathbf{x})$ e das restrições $g_l(\mathbf{x})$, podem ser determinadas por meio da diferenciação das equações (7) e (10) em relação as variáveis de projeto x_i , obtém-se:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \rho_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} L_i + \frac{\partial L_i}{\partial x_i} A_i \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial g_l(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\text{sign}[\sigma_i(\mathbf{x})]}{\sigma_i^a(\mathbf{x})} \frac{\partial \sigma_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{\text{sign}[\sigma_i(\mathbf{x})] \sigma_i(\mathbf{x})}{[\sigma_i^a(\mathbf{x})]^2} \frac{\partial \sigma_i^a(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (15)$$

No entanto a derivada da tensão axial para cara elemento de barra é definida como:

$$\frac{\partial \sigma_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_i(\mathbf{x})}{\partial B_i} \frac{\partial B_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_i(\mathbf{x})}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = E_i \frac{\partial B_i}{\partial x_i} u_i + E_i B_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (16)$$

Sendo u_i o deslocamento da estrutura determinada na etapa de análises de elementos finitos e $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ representa a sensibilidade dos deslocamentos em função das variáveis de projeto x_i .

Entretanto derivando-se a equação (11) em relação as variáveis de projeto x_i , pode-se obter a sensibilidade da tensão crítica de Euler como:

$$\frac{\partial \sigma_i^{cr}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\sigma_i^{cr}(\mathbf{x})}{\partial I_i} \frac{\partial I}{\partial x_i} - \frac{\sigma_i^{cr}(\mathbf{x})}{\partial A_i} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - \frac{\sigma_i^{cr}(\mathbf{x})}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x_i} \quad (17)$$

Ou ainda

$$\frac{\partial \sigma_i^{cr}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\pi^2 E_i}{A_i l_i^2} \frac{\partial I}{\partial x_i} - \frac{\pi^2 E_i I}{A_i^2 l_i^2} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - \frac{2\pi^2 E_i I}{A_i l_i^3} \frac{\partial L_i}{\partial x_i} \quad (18)$$

Onde

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} = \frac{\partial I}{\partial R_m} \frac{\partial R_m}{\partial A_i} = \frac{12R_m^2 + t_s^2}{8}$$

Fatores de Escala

A variação na grandeza dos parâmetros presente no problema de otimização pode provocar diferenças significativas entre as suas magnitudes e causar problemas na estabilidade numérica no algoritmo implementado para solucionar o problema de otimização. Por tanto as variáveis de projeto x_i são definidas como a razão entre o valor

corrente da variável de projeto e o correspondente valor inicial, como apresentado na equação (19).

$$\bar{y}_i = \frac{x_i}{x_i^0} \quad (19)$$

A função objetivo $f(\mathbf{x})$ e as restrições $g_l(\mathbf{x})$ ficam definidas em função da variável de projeto adimensional \bar{y}_i , reescritas da forma:

$$\bar{f} = \frac{f}{f_0} \quad (21)$$

$$\bar{g}_l = \frac{g_l}{g_l^0} \quad (22)$$

Onde f, g_l, f_0 e g_l^0 são os valores correntes e valores correspondentes iniciais avaliados na função objetivo e restrições respetivamente.

e as restrições laterais como:

$$\bar{x}_i^{lb} \leq \bar{y}_i \leq \bar{x}_i^{ub} \quad (23)$$

De forma similar a sensibilidade da função objetivo e as restrições devem ser definidas em função da variável de projeto adimensional \bar{y}_i .

Exemplo Numérico

Neste trabalho é apresentado um exemplo de otimização de forma de treliças espaciais modeladas com curvas de Bézier, empregando a metodologia desenvolvida nas seções anteriores. Será analisada a estrutura de treliça em arco para o armazenamento de açúcar como mostrado na Figura 6. As dimensões da estrutura são: Altura interna $H = 18,150 \text{ m}$, vão interno $V = 35,0 \text{ m}$ e altura da treliça $h = 1,50 \text{ m}$.

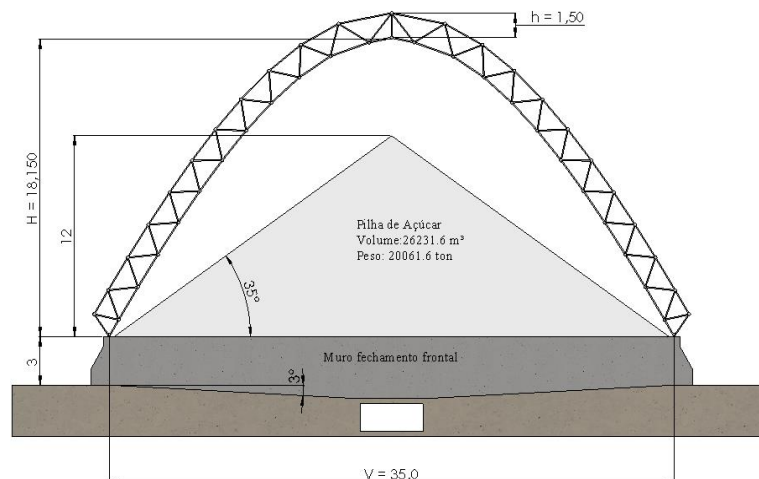


Figura 6 – Vista Frontal da Configuração Inicial da Estrutura.

A seguir pode-se visualizar na tabela 1, o tipo de material selecionado e as suas propriedades mecânicas.

Tabela 1 – Propriedade do Material e Seção Transversal do Perfil.

Material	Alumínio 6351 – T6	
	<u>Propriedades Mecânicas</u>	Unidades
Fcy	2,55E+08	N/m ²
E	7,00E+10	N/m ²
ρ	2647,7956	kg/m ³

A estrutura encontra-se restrita nas direções x e y , na posição nodal 13 e é imposta uma condição de simetria entorno do eixo y , o que implica restringir os nós 12 e 25 na direção x .

No estudo apresentado é analisado com um único caso de carga descrito como:

1- *Caso de Carga 1:*

- a- Carregamento distribuído de 3 kN/m atuando na direção da gravidade, aplicado nas barras do banzo superior.
- b- Carregamento de 50 N atuando na direção da gravidade, aplicando em todos os nós da estrutura.
- c- Carregamento do peso próprio.

A tabela 2, por sua vez, contém os dados de entrada da configuração inicial da estrutura:

Tabela 2 – Variáveis de Projeto, x^{lb} , x^{ub} e Ponto Inicial x^0 .

Variáveis	x^{lb}	x^{ub}	x^0	Unidades
A_{binf}	2,11E-04	2,20E-03	1,21E-3	m^2
A_{bsup}	2,11E-04	2,20E-03	1,21E-3	m^2
A_{diag}	2,11E-04	1,80E-03	1,01E-3	m^2
P_2^x	0,00	8,00	4,00	m
P_2^y	0,00	12,00	6,00	m
P_3^x	3,50	16,50	10,00	m
P_3^y	14,00	22,30	18,15	m
P_4^y	14,00	22,30	18,15	m

Na Figura 7 pode-se verificar terem sido necessárias trinta análises de elementos finitos para o algoritmo de otimização convergir até a solução ótima do problema.

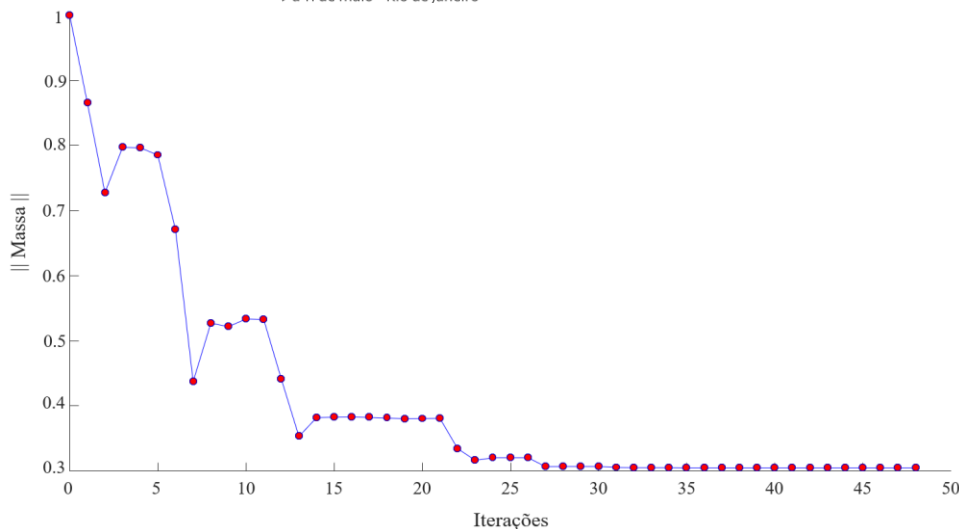


Figura 7 – Histórico de Avaliações da Estrutura Paramétrica.

Após ter resolvido o problema de otimização as variáveis de projeto são atualizadas e uma nova forma na estrutura é projetada. Na Figura 8 se compara a mudança de forma entre os arranjo inicial e final da estrutura em análises, com altura interna final de $H = 14,00\text{ m}$. Como também se observa a distribuição da massa normalizada da estrutura na configuração inicial e final com uma massa inicial de $m_{iT} = 608,50\text{ kg}$ e massa final de $m_{fT} = 185,68\text{ kg}$, obtendo 69.45 % de redução da massa inicial total.

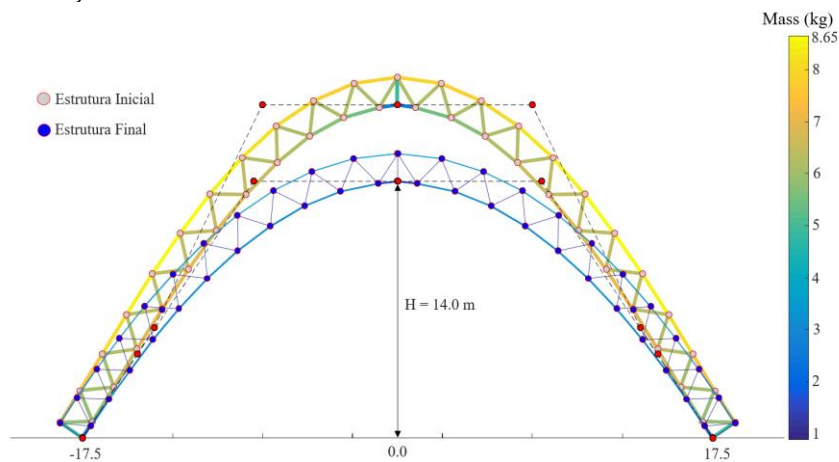


Figura 8 – Distribuição da Massa na Estrutura Inicial e Final.

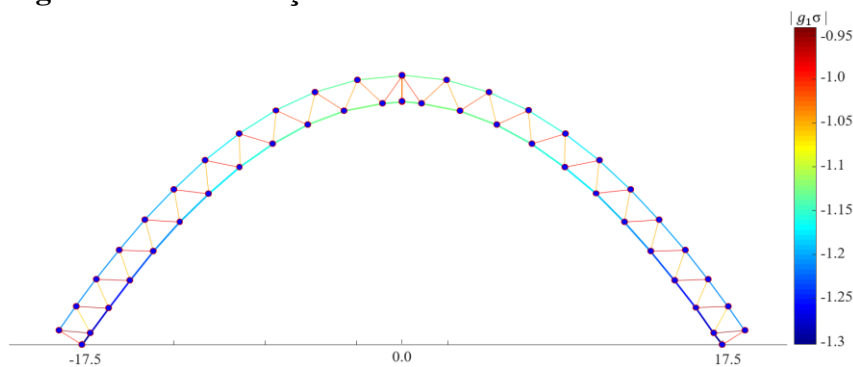


Figura 9 – Restrição g_1 de Tensão de Escoamento.

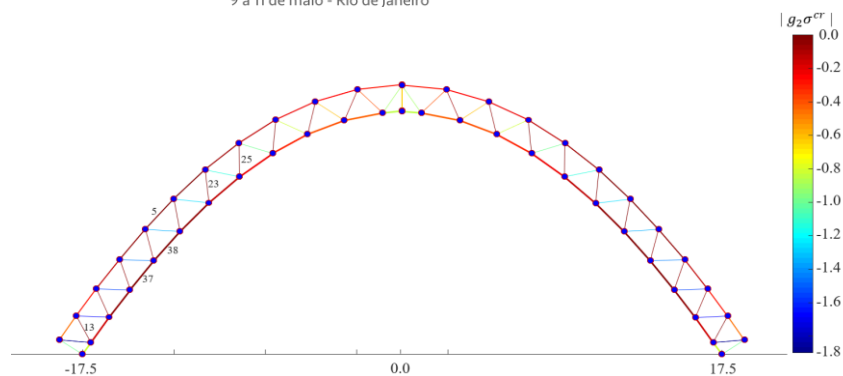


Figura 10 – Restrição g_2 Tensão Crítica de Euler.

Nas Figuras 9 e 10 são apresentadas as parcelas das restrições associadas às tensões de escoamento e às tensões críticas de Euler, respectivamente, onde valores menores do que zero indicam que a restrição está sendo atendida e valores acima de zero indicam que as restrições estão sendo violadas. Verifica-se na Figura 9 que nenhuma das barras está próxima do seu limite de escoamento. No entanto, observa-se na Figura 10, que as barras 5, 13, 23, 25, 37, 38 e as barras do lado direito simétrico estão com restrições próximas de zero, indicando que as mesmas estão ativas, ou seja, que a barra está com a sua tensão crítica de Euler no valor máximo permitido, o que podemos afirmar que o projeto está sendo dominado pela tensão crítica de Euler.

Na tabela 3 é comparada a convergência da solução numérica associada à mudança do ponto inicial x_i^0 , podendo considerar qualquer ponto de partida x_i^0 . No entanto, a resposta numérica do problema de otimização inclina-se a convergir dentro de uma região confiável e segura com variações nas formas geométricas da estrutura.

Tabela 3 – Análises do Ponto Inicial x_i^0 .

Variáveis	x_1^0	x_1^f	x_2^0	x_2^f	x_3^0	x_3^f	Unidades
A_{binf}	1,21E-3	9,30E-4	1,21E-3	5,30E-4	1,11E-3	5,30E-4	m^2
A_{bsup}	1,21E-3	9,30E-4	1,21E-3	2,22E-4	1,11E-3	2,22E-4	m^2
A_{diag}	1,01E-3	7,76E-4	1,01E-3	5,21E-4	1,11E-3	5,21E-4	m^2
P_2^x	4,00	3,09	4,00	3,06	4,00	3,06	m^2
P_2^y	6,00	4,63	6,00	4,58	7,00	4,58	m
P_3^x	10,00	7,71	10,00	9,50	10,50	9,50	m
P_3^y	18,15	14,00	19,50	14,00	17,00	14,00	m
P_4^y	18,15	140,0	19,50	14,00	17,00	14,00	m
m_{iT}/m_{fT}	608,50	185,68	624,32	185,68	572,15	185,69	kg
Tempo	29,7901		22,23		20,92		s
Iterações	49		47		48		N/A

A avaliação dos resultados foi feita mediante a comparação do código de elementos finitos desenvolvido no Matlab® com o *software* de Engenharia SAP2000, considerando para os dois casos estrutura reticulada. A tabela 4 traz a comparação entre as duas soluções abordadas para os deslocamentos nas direções x , y e z das posições nodais 2 e 10, além da comparação das tensões das barras 7 e 41, respectivamente.

Tabela 4 – Validação dos Resultados Código Matlab® com SAP2000.

Nó/Elemento		Matlab®	SAP2000	Erro Relativo
Deslocamento (m) Nó 2	x	2,86E -04	2,86E -04	0,0
	y	0,0	0,0	0,0
	z	-1,7E-3	-1,7E-3	0,0
Deslocamento (m) Nó 10	x	2,1E-3	2,1E-3	0,0
	y	0,0	0,0	0,0
	z	-2,05E-2	-2,05E-2	0,0
Tensão (Barra 7) (N/m^2)		-4.4221E+07	-4.4221E+07	0,0
Tensão (Barra 41) (N/m^2)		-4.03431E+07	-4.03431E+07	0,0

A solução numérica apresentada na tabela 4 revelou-se satisfatórias, sem apresentar divergências nos deslocamentos e tensões, portanto, demonstrou-se que a veracidade dos resultados obtidos no código implementado no Matlab® é equivalente aos resultados fornecidos pelo *software* SAP2000 usado para validar as análises de elementos finitos.

Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvido uma metodologia computacional para a otimização paramétrica e de forma de treliças espaciais modeladas com curvas de Bézier, com o intento de determinar a configuração ótima da estrutura. Para este desenvolvimento foram necessárias à implementação e a integração de programação matemática, análise estrutural e análise de sensibilidade. Obtendo a resposta da estrutural pela solução de um problema estático linear, através de uma implementação em Matlab®, e validadas usando o programa SAP2000. As variáveis de projeto consideradas foram as áreas das seções transversais e as coordenadas dos pontos de controle da geometria paramétrica. O problema de otimização encontra-se restrito pela tensão de escoamento $\sigma_i(\mathbf{x})$, tensão crítica de Euler $\sigma_i^{cr}(\mathbf{x})$ e pelas restrições laterais x_i^{lb} e x_i^{ub} .

Com base no exemplo numérico analisado neste trabalho, verificou-se a viabilidade e aplicabilidade da otimização paramétrica e de forma em estruturas treliçadas de grandes dimensões devido a convergência da função objetivo para o ponto de mínimo. Não obstante se uma solução ótima não seja obtida, o projeto final é considerado viável, devido ao algoritmo de pontos interiores que parte de uma solução viável. Um incremento no número de grupos de área pode ser considerado para induzir em uma resposta monotônica para o ponto de mínimo. Pode-se perceber na Figura 8 um projeto aprimorado em relação ao projeto inicial, conseguindo reduzir um 69.45 % da massa inicial,



Referências

- [1] BEHEAD, S. A.; PARKER, G. A. R. Half a Century with the Space Structures Research Centre of the University of Surrey. IASS – SLTE, 2014.
- [2] Imagem do Aeroporto Internacional Salgado Filho - Porto Alegre, Disponível em: <http://www.copa2014.gov.br/pt-br/dinamic/galeria_imagem/14774>, Acesso em: 08 de março de 2018.
- [3] Imagem do Centro de Convenções de Anhembi - São Paulo <<http://www.anhembi.com.br/pavilhao-de-exposicoes-anhembi-recebe-30a-feira-internacional-de-mecanica/>>, Acesso em: 08 de março de 2018.
- [4] ARORA, J. S. Introduction to Optimum Design. 4 ed. Elsevier, 2016.
- [5] PALUSZNY, M.; PRAUTZSCH, H.; BOEHM, W. Bézier and B-splines techniques. 1 ed. Karlsruhe, 2002.
- [6] ZOZ J. Estudo de Métodos e Algoritmos de Splines Bézier, Casteljau e B-Spline. 1999 Blumenau, Universidade Regional de Blumenau.
- [7] VAZ, L. E.; Pereira, A.; MENEZES, I. F. M. Programação Matemática: Teoria, Algoritmos e Aplicações na Engenharia. Rio de Janeiro, PUC-Rio, 2012.
- [8] HERSKOVITS, J. Advances in Structural Optimization, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [9] LEE, J. S. A Form-finding Technique for Three-dimensional Spatial Structures. Architectural Institute of Korea, 2013.
- [10] VANDERPLAATS, G. N. Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications. 1 ed. McGraw-Hill, 1984.
- [11] FOX, R. L. Optimization Methods for Engineering Design, 1ed. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1971.
- [12] HANSEN, S. R.; VANDERPLAATS, G. N. Approximation Method for Configuration Optimization of Trusses. AIAA SDM, 1988.