

Momentos Hiperestáticos de Protensão em Lajes Lisas Protendidas

Rogério José Solidario Chaves¹, Roberto Chust de Carvalho², Artur Lenz Sartorti³

¹ Instituto de Ensino Superior de Itapira/ Estruturas / rogerio@fcdengenharia.com

² Universidade Federal de São Carlos / Estruturas / robertochustcarvalho@gmail.com

³ Centro Universitário Adventista de São Paulo / Estruturas / artur.sartorti@ucb.org.br

Resumo

Os chamados momentos hiperestáticos de protensão compõem um dos assuntos mais interessantes e de difícil entendimento no meio técnico, e essa dificuldade de entendimento motiva a realização deste trabalho. Quando se projeta uma viga protendida de uma ponte, é muito comum que essas vigas sejam projetadas com a vinculação bi-apoiada, mas existe também a possibilidade de torná-las hiperestáticas principalmente quando se tem vigas contínuas. Na protensão dessas vigas hiperestáticas surgem esforços adicionais na estrutura que devem ser levados em consideração. Um esforço particular são os momentos hiperestáticos de protensão. Embora nas pontes em gerais, é comum, utilizar apoios elásticos como neoprene, isso faz com que o tabuleiro da ponte não tenha uma ligação com os pilares, mas isso não é comum em lajes de edifícios do tipo lisa, em que há ligação da laje com os pilares, ficando mais evidentes os momentos hiperestáticos de protensão. Em lajes lisas os pilares já geram na laje momentos negativos, que precisam ser combatidos com protensão, e isso faz com que surjam esforços adicionais que necessitam ser estudados e compreendidos com mais precisão. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é usar uma laje lisa simples como modelo de cálculo, realizar o pré-dimensionamento, demonstrar como são encontrados os momentos hiperestáticos, e realizar uma análise da fissuração da laje na combinação rara de serviços comparando com o momento de fissuração conforme a NBR6118:2014 e realizar a análise da seção com sua inércia equivalente, e verificando se o momento hiperestático sobre os pilares sofre alguma variação significativa considerando a laje com a concretagem “*in loco*”. A estrutura será lançada e analisada no SAP2000[®] *software* de elementos finitos.

Palavras-chave

Concreto Protendido, Protensão, Momento Hiperestático, Lajes Lisas.

Introdução

Para a demonstração dos momentos hiperestáticos de protensão, foi utilizado um exemplo de uma laje lisa apoiada sobre pilares. Para serem obtidos os esforços de protensão foi utilizado o método das cargas equilibrantes (*load balancing*), que de acordo com EMERICK (2002), é um dos métodos mais apropriados para o cálculo de lajes protendidas. O método consiste em calcular qual seria a força de protensão necessária para equilibrar, no traçado do cabo, os carregamentos externos. Os esforços obtidos a partir da carga balanceada são divididos em duas parcelas, a primeira são os momentos isostáticos de protensão e o segundo são os momentos hiperestáticos de protensão.

Inicialmente, pode-se imaginar uma faixa de laje plana que possui um traçado como o indicado na Figura 1.

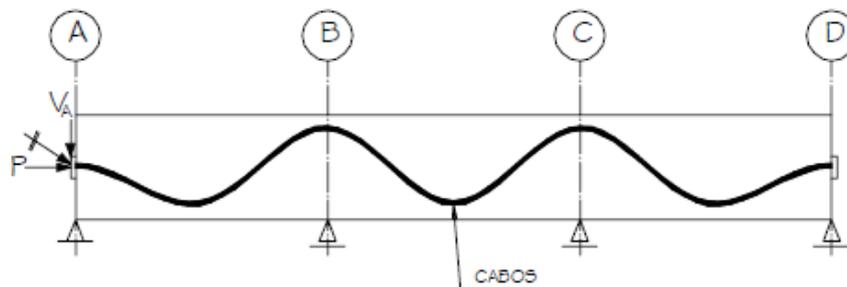


Figura 1 – Traçado típico dos cabos de uma laje protendida.

Fonte: EMERICK (2002, p. 50).

Como apresentado por THOMAZ (1993) os desvios que os cabos possuem, introduzem um carregamento contrário ao das ações externas. A determinação deste carregamento é o chamado método das cargas equilibrantes. A Figura 2 ilustra este conceito. Assim sendo, o cabo da Figura 1, gera o carregamento ilustrado na Figura 3. Este conceito é fundamental para a determinação dos momentos hiperestáticos.

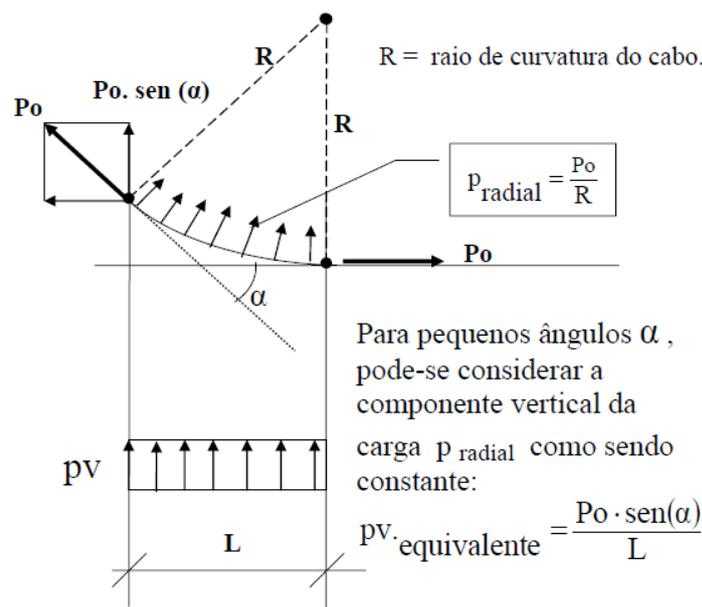


Figura 2 – Método das cargas equilibrantes.

Fonte: THOMAZ (1993, p. 4)

Assim sendo, o cabo da Figura 1, gera o carregamento ilustrado na Figura 3. Este conceito é fundamental para a determinação dos momentos hiperestáticos.

O momento fletor necessário para manter o equilíbrio da estrutura é o momento isostático, também conhecido como momento primário. Ele é determinado pela simples multiplicação da força de protensão do cabo pela excentricidade na seção analisada.

Conforme EMERICK (2002) a explicação do momento hiperestático de protensão é simples de se demonstrar, mais o conceito é bem mais amplo do que se imagina.

Considerando a mesma estrutura da Figura 1, se forem retirados os apoios do meio, irá surgir um deslocamento vertical para cima, esse deslocamento é impedido pelos pilares

que conseqüentemente gera uma reação nos pilares. Essas reações geram o momento hiperestático de protensão, conforme ilustrado na Figura 4.

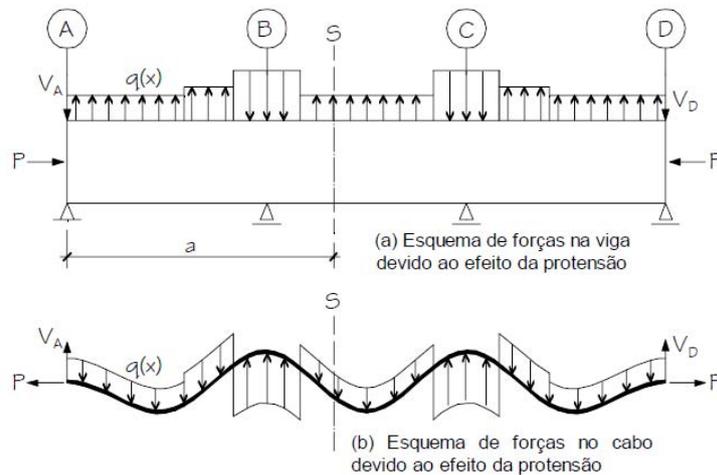


Figura 3 – Esquema de forças para o cabo da Figura 1.

Fonte: EMERICK (2002, p. 50).

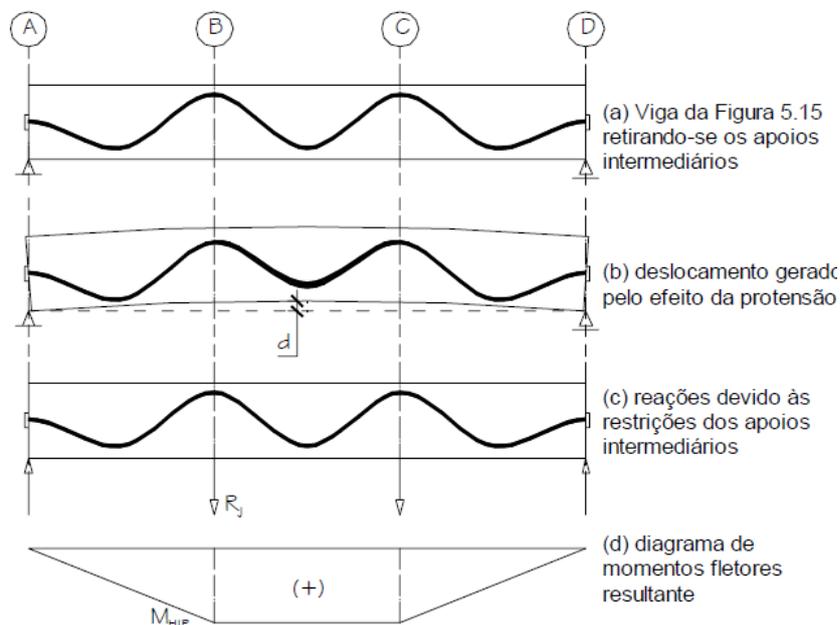


Figura 4 – Representação do momento hiperestático de protensão.

Fonte: EMERICK (2002, p. 52).

Segundo PFEIL (1984) no que diz respeito aos momentos hiperestáticos, as estruturas de concreto não possuem comportamento elásticos, e a inelasticidade dos materiais provoca uma redistribuição dos momentos hiperestáticos nas estruturas. Essa redistribuição dos esforços é muito mais complexa que a redistribuição provocada pelas cargas atuantes. Três são os principais fatores que influenciam no fenômeno:

- Reduções locais de rigidez, decorrentes da fissuração, produzem uma redistribuição dos efeitos hiperestáticos de protensão;
- A plastificação da estrutura diminuiu o grau de hiperestaticidade, o que provoca uma redução nos momentos hiperestáticos de protensão;
- Com o aumento das solicitações atuantes, o esforço de protensão sofre um aumento nas seções fissuradas, porém se mantém inalterado na maior parte das demais seções da laje.

Os conhecimentos disponíveis atuais não são suficientes para a determinação dos momentos hiperestáticos considerando com precisão a inelasticidade da estrutura próximos da ruptura. Portanto, é comum determinar os momentos hiperestáticos calculados com uma protensão efetiva, que soma aos efeitos dos momentos produzidos pelos carregamentos EMERICK (2002)].

Momento balanceado e momento hiperestático

Nos momentos obtidos com o método das cargas equilibrantes estão inclusos os momentos isostáticos e os momentos hiperestáticos de protensão, portanto é possível encontrar os esforços através do equilíbrio da estrutura e com os esforços totais subtraem-se os momentos isostáticos e obtêm-se os momentos hiperestáticos de protensão.

Obtidos os esforços com as cargas equilibrantes pode-se obter os momentos hiperestáticos com a Equação 1.

$$M_{bal} = M_{hip} + M_{isos} \quad (1)$$

Sendo:

M_{bal} o momento balanceado ou momento total;

M_{hip} o momento hiperestático de protensão;

M_{isos} o momento isostático de protensão de terminado pela Equação 2.

$$M_{isos} = P.e \quad (2)$$

Sendo:

P a força de protensão na seção analisada;

e a excentricidade do cabo na seção analisada.

Portanto, pode-se escrever que (Equação 3):

$$M_{hip} = M_{bal} - M_{isos} = M_{bal} - P.e \quad (3)$$

Modelo numérico analisado

Para demonstrar a determinação dos momentos hiperestáticos de protensão, foi executado um exemplo numérico utilizando uma laje lisa maciça protendida, sem viga de bordo, com espessura de 26 cm, utilizando cordoalhas engraxadas em bainhas de polipropileno. Foram admitidas as seguintes características: ancoragem viva e morta; resistência característica à compressão do concreto (f_{ck}) de 25 MPa; armadura ativa CP 190 RB; coeficiente de atrito cabo-bainha igual a 0,05; escorregamento da cunha de ancoragem de 6 mm; ação permanente de 4,50 kN/m² e ação variável de 5,00 kN/m². As dimensões do modelo e as faixas analisadas no dimensionamento estão ilustradas na Figura 5. Foi

definido o cabo representante conforme ilustrado na Figura 5. Como a seção é simétrica é apresentada apenas metade da seção.

A tensão inicial na armadura ativa é o menor valor encontrado na Equação 4.

$$\sigma_{pi} \leq \begin{cases} 0,74 \cdot f_{ytk} = 140,60 \text{ kN} / \text{cm}^2 \\ 0,84 \cdot f_{pyk} = 134,40 \text{ kN} / \text{cm}^2 \Rightarrow \text{adotado} \end{cases} \quad (4)$$

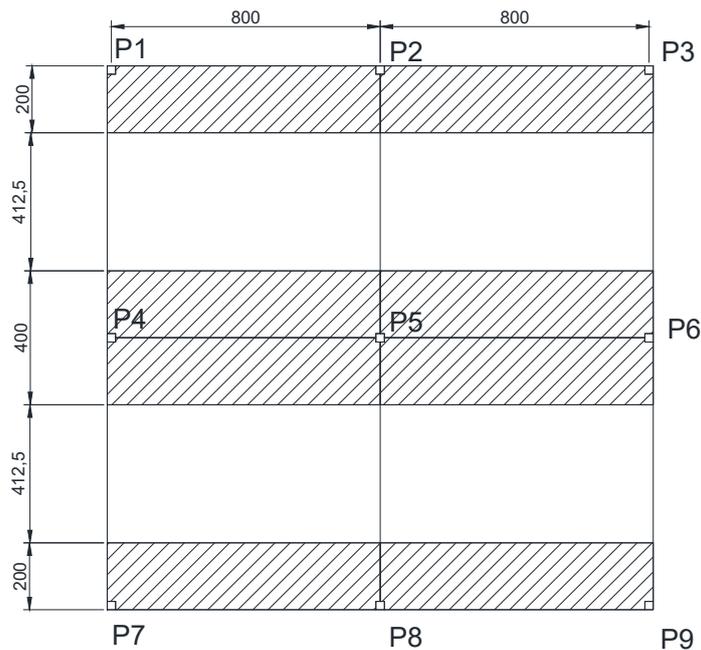


Figura 5 – Dimensões e faixas analisadas.

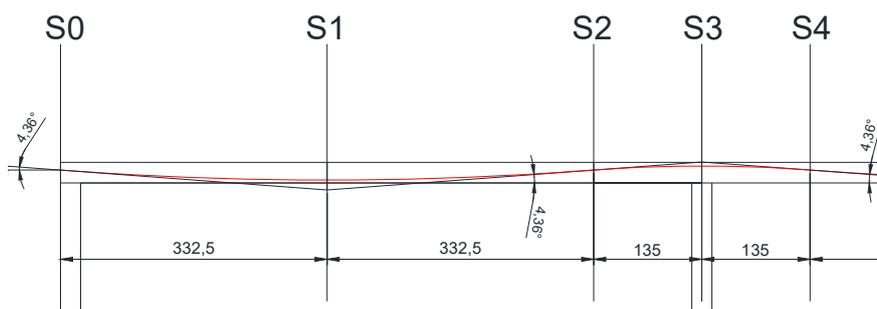


Figura 6 – Posicionamento do cabo representante (cotas em cm).

Na Tabela 1 são apresentados os desvios angulares de cada seção.

Tabela 1 – Desvios angulares.

Trecho	S0-S1	S1-S2	S2-S3
Desvio Angular (°)	4,36	8,72	8,72

Definidos a seção da laje e os desvios angulares, pode-se realizar os cálculos das perdas de protensão.

As perdas de protensão que foram determinadas estão contidas em dois grupos. Em primeiro lugar estão as perdas imediatas compostas das perdas por atrito e a perda por deformação da ancoragem. A perda imediata por deformação elástica do concreto foi desprezada.

No segundo grupo de perdas estão as diferiadas no tempo, oriundas da fluência do concreto, retração do concreto e da relaxação da armadura.

O cálculo detalhado das perdas, bem como exemplos de aplicação, podem ser encontrados em CARVALHO (2017).

A Tabela 2 sintetiza os resultados das perdas de protensão para este exemplo.

Tabela 2 – Perdas de protensão imediatas (kN/cm²).

Seção	Atrito	Deslizamento da ancoragem	% de perda imediata	Perdas diferiadas	% de perda total
S0	134,40	121,30	9,75	94,56	29,64
S1	133,67	122,03	9,20	95,29	29,10
S2	132,43	123,26	8,29	96,53	28,18
S3	131,34	124,36	7,47	97,62	27,37
S4	130,25	125,44	6,67	98,71	26,56
S5	129,05	126,65	5,77	99,91	25,66
S6	128,83	126,86	5,61	100,13	25,50

Essas são as tensões finais que foram utilizadas para o cálculo do modelo.

As verificações e pré-dimensionamento para encontrar a quantidade de cabos necessários para cada seção adotada da laje passa pelos ELU e ELS. O pré-dimensionamento será realizado para toda a carga permanente, e os esforços serão obtidos com o modelo de grelhas.

Os esforços obtidos pelo programa mostram os momentos fletores para as cargas permanentes na estrutura divididas por faixas. A Tabela 3 mostra os momentos fletores máximos encontrados devidos às cargas permanentes.

Tabela 3 – Momentos fletores máximos (carga permanente).

Faixa	Momento Fletor (-) (kN.m/m)	Momento Fletor (+) (kN.m/m)
Pilares P4/P5/P6	135,10	59,80
Meio do vão	31,00	45,20
Pilares P1/P2/P3	101,60	54,80

Com os momentos fletores devidos às cargas permanentes, é possível obter uma armadura ativa para as seções mostradas na Figura 5. Em CARVALHO (2012) é demonstrado como é realizado o dimensionamento no E.L.U. da armadura de protensão. A Tabela 4 mostra as áreas de aço consideradas neste exemplo.

Tabela 4 – Armadura de protensão utilizada em cada faixa da Figura 4.

Faixa	Armadura ativa (cm ² /m)
Pilares P4/P5/P6	13,182
Meio do vão	2,820
Pilares P1/P2/P3	9,245

Lançamento das Forças nos nós da Grelha.

O procedimento adotado para o lançamento das forças de protensão é o método das forças equilibrantes, como é uma grelha, forças devem ser encontradas resultantes das forças. O espaçamento adotado da grelha é de metro em metro.

A demonstração de uma seção de como as forças são encontradas é ilustrada na Figura 7.

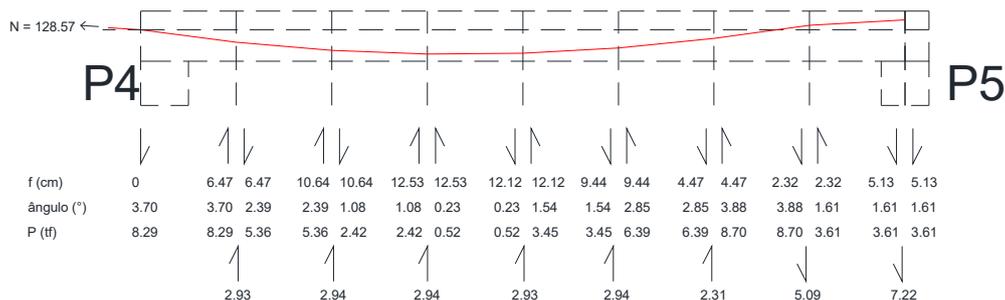


Figura 7– Representação do método das forças equilibrantes na Seção no Apoio.

Como a laje é simétrica, as seções no outro sentido das lajes são idênticas e portanto é necessário sobrepor as seções e considerando as influências das cargas obtém-se o carregamento que será lançado na grelha do modelo numérico.

Em DUARTE (1995) é demonstrado com mais detalhes como são obtidas as forças equilibrantes, em que nesse material ele chama de método das forças de desviação. O conceito é exatamente o mesmo. A diferença é apenas que ele concentra as forças de protensão nos nós da grelha, para o lançamento das forças de protensão da grelha.

Com as forças lançadas na grelha do SAP2000® foram obtidos os momentos balanceados devidos às forças de protensão que estão atuando nas lajes, conforme são mostradas na Tabela 5.

Uma observação importante na obtenção dos momentos na grelha é que os momentos pontuais gerados sobre os apoios foram uniformizados para a faixa estudada. Como a laje é simétrica os resultados apresentados indicarão apenas um sentido, mas as forças de protensão foram lançadas nos dois sentidos da laje na grelha do SAP2000®.

Tabela 5 – Momentos fletores (balanceados).

Faixa	Momento Fletor (+) (kN.m/m)	Momento Fletor (-) (kN.m/m)
Pilares P4/P5/P6	128,00	81,50
Meio do vão	47,10	61,90
Pilares P1/P2/P3	60,30	67,50

Em posse dos momentos balanceados devidos às forças de protensão pode-se obter o momento hiperestático de protensão, conforme são mostradas na Tabela 6.

Tabela 6 – Momentos hiperestáticos de protensão (apoio)

Faixa	Momento Fletor (kN.m/m) (Apoio)	Momento Fletor (kN.m/m) (Meio do Vão)
Pilares P4/P5/P6	62,10	79,50
Meio do vão	33,00	27,40
Pilares P1/P2/P3	14,00	45,40

O ELS será verificado na combinação rara de serviço. Caso o momento atuante for maior que o momento de fissuração, será caracterizado a passagem do Estádio I para o Estádio II e portanto há a formação de fissura.

Nas seções da laje em que for ultrapassado o M_r (momento de fissuração), considera-se que a seção esteja fissurada, e embora algumas seções não estejam fissuradas, neste caso deve-se considerar uma inércia equivalente para as seções fissuradas conforme a NBR 6118:2014, portanto será realizado uma verificação das seções fissuradas e será aplicada essa redução da rigidez na seção fissurada e verificar como se comportam os momentos hiperestáticos de protensão. De acordo com CARVALHO (2012) a Equação 5 mostra como é obtido o momento de fissuração para o concreto protendido.

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} + \frac{N_p \cdot I_c}{A_c \cdot y_t} + N_p \cdot e \quad (5)$$

Sendo:

α o valor igual a 1,5 para seções retangulares;

I_c a inércia da seção bruta do concreto;

A_c a área da seção transversal de concreto;

M_r o momento de fissuração;

f_{ct} a resistência característica do concreto à tração com seu valor inferior;

N_p a normal de protensão;

y_t a distância entre o centro de gravidade da seção transversal e a borda mais tracionada;

e a excentricidade da força de protensão.

Tabela 7 – Verificação dos estádios de carregamentos

Faixa	Momento Fletor + (Rara) (kN.m/m)	Momento Fletor - (Rara) (kN.m/m)	Mr + (kN.m/m)	Mr -(kN.m/m)
Pilares P4/P5/P6	100,90	228,80	247,06	151,50
Meio do vão	80,10	52,10	76,62	56,27
Pilares P1/P2/P3	92,10	173,50	182,30	115,58

Na Tabela 7 pode-se observar que o momento de fissuração foi ultrapassado para os momentos fletores marcados em negrito itálico. Para essas seções serão considerados o momento de inércia equivalente conforme a Equação 6.

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_2 \quad (6)$$

Sendo:

I_2 o momento de inércia com a seção fissurada no Estádio II;

M_a o momento atuante na combinação rara apresentado na Tabela 7.

Para se obter o valor de I_2 é necessário conhecer o valor de x_2 que é a profundidade da linha neutra no Estádio 2, e é necessário conhecer a armadura passiva em cm^2/m e estabelecendo a largura de 100 cm (laje maciça).

Pela Equação 7 é obtido o valor de x_2 :

$$\frac{b \cdot x_2^2}{2} - \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x) = 0 \quad (7)$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}}$$

Sendo:

A_s a armadura passiva dimensionada para a sobrecarga;

b a largura da seção considerada;

d a altura útil medida da borda mais comprimida ao centro de gravidade da armadura de tração;

E_s o módulo de elasticidade do aço;

E_{cs} o módulo de elasticidade secante do concreto.

A inércia no I_2 é dada pela Equação 8.

$$I_2 = \frac{b \cdot x_2^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x)^2 \quad (8)$$

O módulo de elasticidade secante do concreto de 25 MPa para o agregado graúdo de granito é de 24000 MPa, e a área de aço passiva foi dimensionada para a sobrecarga e possui uma área de aço de 14,86 cm²/m para os vãos dos Pilares P4, P5 e P6 e 10,62 cm²/m para os Pilares P1, P2 e P3 e na seção do meio do vão 4,28 cm²/m. A inércia bruta da laje é de 146466,67 cm⁴/m. Os resultados são apresentados na Tabela 8.

Com as inércias reduzidas, realizou-se o lançamento no SAP2000[®] e obteve-se os novos momentos balanceados que são apresentados na Tabela 9.

Os momentos balanceados foram encontrados os momentos hiperestáticos de protensão, que são apresentados na Tabela 10.

Tabela 8 – Verificação dos estádios de carregamentos

Faixa	I ₂ (Estádio 2) cm ⁴ /m	Inércia Equivalente cm ⁴ /m	Relação (I _{eq} /I _c) %
Pilares P4/P5/P6	57635,86	83424,79	56
Meio do vão	21606,06	130889,50	89
Pilares P1/P2/P3	50197,82	78657,85	53

Tabela 9 – Momentos fletores (balanceados)

Faixa	Momento Fletor (+) (kN.m/m)	Momento Fletor (-) (kN.m/m)
Pilares P4/P5/P6	105,12	71,26
Meio do vão	47,30	67,58
Pilares P1/P2/P3	47,30	71,70

Tabela 10 – Momentos hiperestáticos de protensão (apoio)

Faixa	Momento Fletor (kN.m/m) (Apoio)	Momento Fletor (kN.m/m) (Meio do Vão)
Pilares P4/P5/P6	39,17	89,83
Meio do vão	33,19	33,13
Pilares P1/P2/P3	1,24	41,01

Conclusões

Os momentos hiperestáticos de protensão sofreram uma redução na seção fissurada do apoio e um aumento na seção do meio do vão. Também houve redistribuição dos momentos permanentes, e os resultados demonstram que essa redução alterou o dimensionamento na ordem de 10%, um resultado considerado pequeno perto da carga elevadíssima do exemplo estudado.

É importante frisar que este é um trabalho inicial para um tema complexo que são os momentos hiperestáticos de protensão, e que a intenção é fomentar a discussão e incentivar novos pesquisadores a estudar mais profundamente sobre o assunto. Os resultados para a faixa entre os Pilares P4/P5/P6, são apresentadas nas Tabelas 11 e 12.

Tabela 11 – Momentos E.L.U.

Faixa	Momento Fletor (kN.m/m) (Apoio) S/ Fissuração	Momento Fletor (kN.m/m) (Apoio) C/ Fissuração	%
Pilares P4/P5/P6	133,25	120,56	9,52

Tabela 12 – Momentos E.L.U.

Faixa	Momento Fletor (kN.m/m) (Meio do Vão) S/ Fissuração	Momento Fletor (kN.m/m) (Meio do Vão) C/ Fissuração	%
Pilares P4/P5/P6	171,20	188,84	9,31

Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- CARVALHO, R. C. Estruturas em Concreto Protendido. São Paulo: PINI, 2012.
- CARVALHO, R. C.; Pisos de Lajes Protendidas: Lajes Lisas Protendida. São Carlos, SP. Universidade Federal de São Carlos, 2017 (Notas de Aula).
- DUARTE, EVANDRO PORTO. Projeto e Cálculo de Lajes Planas Protendidas. MAC Sistema Brasileiro de Protensão, 76p, 1984.
- EMERICK A.A. Projeto e Cálculo de Lajes Planas Protendidas. 1. ed. Brasília: Interciência, 2002.
- PFEIL, W. Concreto Protendido: Processos construtivos, perdas de protensão. 2ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora LTDA, 1984.
- THOMAZ E.C.S. Concreto Protendido – Momento Hiperestático de Protensão, IABSE Workshop, International Association for Bridge and Structural Engineering, New Delhi, 1993. (Notas de Aula).
- PFEIL, W. Concreto Protendido: Processos construtivos, perdas de protensão. 2ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora LTDA, 1984.