



## **Análise da Distribuição dos Coeficientes de Rigidez Dinâmica na Base da Fundação de uma Máquina Rotativa**

**Caio Ramiro Torres<sup>1</sup>, Sergio Hampshire de Carvalho Santos<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Graduando/ Escola Politécnica – UFRJ / caioramiro@poli.ufrj.br

<sup>2</sup>Professor Titular/ Escola Politécnica – UFRJ / sergiohampshire@poli.ufrj.br

### **Resumo**

Os deslocamentos produzidos no solo a partir de ações dinâmicas – provenientes de equipamentos como geradores, motores, máquinas a percussão, etc. – dependem de diversos parâmetros relativos à estrutura da fundação e ao solo, sendo os últimos altamente variáveis e de difícil obtenção. No campo da análise dinâmica pela formulação complexa, a rigidez do terreno quanto ao movimento da fundação é traduzida pela impedância dinâmica do solo, uma função complexa cuja parte real representa a rigidez dinâmica e a parte imaginária corresponde à capacidade de dissipação de energia (amortecimento) do sistema. Modelos simplificados, como sistemas massa-mola-amortecedor, são capazes de representar a rigidez dinâmica do solo a partir de molas e amortecedores, com coeficientes que podem ser calculados através de diferentes expressões, tanto analíticas quanto aproximadas. O conceito de molas e amortecedores, muito aplicado em sistemas que consideram o bloco de fundação como perfeitamente rígido, pode ser estendido para uma malha de elementos finitos que representa a interface fundação-solo. Os coeficientes de impedância dinâmica de cada elemento, reunidos, formam a matriz de rigidez condensada do solo, que fornece um resultado explícito acerca da distribuição da rigidez ao longo da base do bloco. O presente trabalho busca desenvolver uma metodologia para obter a matriz de rigidez dinâmica da base da fundação para uma máquina rotativa, trabalhando em uma frequência constante. Os resultados mostram que o amortecimento, cujo comportamento ainda é pouco conhecido, apresenta distribuição espacial similar à rigidez, esta já bem equacionada: ambos tendem a se concentrar no contorno da base da fundação, onde os coeficientes são expressivamente mais altos do que em seu interior.

### **Palavras-chave**

Fundações de Máquinas; Rigidez do Solo; Amortecimento do Solo; Interação Solo-Estrutura; Análise Dinâmica.

### **Objetivo do trabalho**

O presente trabalho visa analisar a distribuição espacial dos coeficientes de rigidez e de amortecimento na base da fundação de uma máquina rotativa, através do cálculo da matriz de rigidez de uma malha de elementos finitos que representa a interface fundação-solo.

## Introdução

### *Modelagem de fundações de máquinas*

Um dos principais aspectos a ser observado no projeto de uma fundação sujeita a carregamentos dinâmicos é a limitação dos deslocamentos. Enquanto que o deslocamento vertical estático (recalque) tolerável de uma fundação é da ordem de centímetros, o deslocamento dinâmico tolerável é da ordem de alguns micrômetros ( $1 \times 10^{-6} m$ ). Tal exigência decorre da necessidade de se manter o bom funcionamento da máquina, além de se garantir o conforto humano e impedir que estruturas vizinhas sejam afetadas por uma vibração excessiva. Em geral, observa-se nas normas de projeto de fundações de máquinas que quanto maior a velocidade efetiva de operação, menores serão os deslocamentos toleráveis.

### *Impedância dinâmica*

Simplificadamente, o problema de uma fundação sujeita a um carregamento harmônico pode ser modelado como um sistema massa-mola-amortecedor com seis graus de liberdade (três translações e três rotações, assumindo que o bloco seja muito mais rígido que o solo adjacente e só haja movimento como corpo rígido). A cada grau de liberdade, atribui-se uma mola ( $K$ ) e um amortecedor ( $C$ ), cujos coeficientes são funções dos parâmetros do solo e da frequência circular de excitação  $\omega$  ( $\omega = 2\pi f$ , sendo  $f$  a frequência de operação da máquina).

Define-se então a função de impedância dinâmica  $\bar{K}$ :

$$\bar{K}(\omega) = K(\omega) + i\omega C(\omega) \quad (1)$$

No caso da consideração das deformações sofridas pelo bloco de fundação (bloco flexível), o sistema passa a ter infinitos graus de liberdade e, portanto, infinitos coeficientes de rigidez e amortecimento ( $K$  e  $C$ ).

O modelo proposto por SANTOS e GUIMARÃES (1988) permite calcular a matriz de rigidez condensada na interface fundação-solo (ou seja, obter os coeficientes  $K$  e  $C$  de (1)) a partir da discretização desta interface em uma malha de elementos finitos. A partir desta malha, obtém-se a matriz de flexibilidade da interface fundação-solo, pelo cálculo dos deslocamentos verticais produzidos nos elementos discretizados com a aplicação de cargas unitárias verticais, concentradas e harmônicas. Para o cálculo destes deslocamentos utiliza-se aqui a solução fundamental desenvolvida por DOMÍNGUEZ e ABASCAL (1984), que, para uma carga dela distante  $r$  aplicada na direção  $i$ , fornece o deslocamento na direção  $j$ , de um ponto em um semiespaço homogêneo e elástico:

$$U_{ji} = \frac{1}{\alpha\pi r c_s^2} [\psi\delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}] \quad (2)$$

Onde:

$$\psi = \frac{\exp(-k_s r)}{r} + \left( \frac{1}{k_s^2 r^2} + \frac{1}{k_s r} \right) \frac{\exp(-k_s r)}{r} - \frac{c_s^2}{c_p^2} \left( \frac{1}{k_p^2 k_r^2} + \frac{1}{k_p r} \right) \frac{\exp(-k_p r)}{r}$$

$$\chi = \left( \frac{3}{k_s^2 r^2} + \frac{3}{k_s r} + 1 \right) \frac{\exp(-k_s r)}{r} - \frac{c_s^2}{c_p^2} \left( \frac{3}{k_p^2 k_r^2} + \frac{3}{k_p r} + 1 \right) \frac{\exp(-k_p r)}{r} \quad (3)$$

E onde:

$$k_s = i\omega / c_s$$

$$k_p = i\omega / c_p$$

Define-se  $c_p$  como a velocidade de propagação da onda primária no solo e  $c_s$  é a velocidade de propagação da onda secundária.

A matriz de rigidez condensada na superfície também é obtida para o caso estático (onde não há atuação de força dinâmica). Calculam-se os deslocamentos a partir da expressão de DOMÍNGUEZ e ABASCAL (1984) para o deslocamento produzido por uma força estática unitária:

$$U_{ji} = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \frac{1}{r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}] \quad (4)$$

O mesmo procedimento pode ser realizado a partir da expressão de Boussinesq, que fornece o deslocamento vertical de um ponto a uma distância  $r$  de uma força unitária estática:

$$\delta = \frac{1-\nu}{2\pi r G} \quad (5)$$

### *Parâmetros adimensionais de rigidez e amortecimento*

Pode-se escrever (1) em função da rigidez estática da fundação  $K^s$  :

$$\bar{K} = K^s (k + ia_0 c) \quad (6)$$

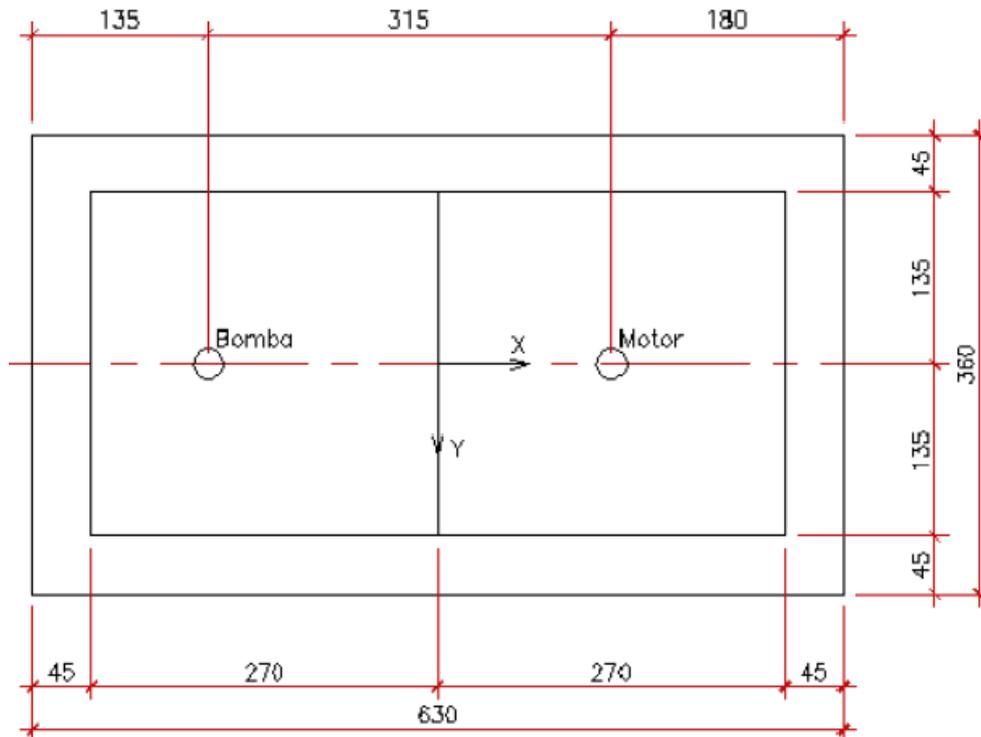
A equação (6) define os parâmetros adimensionais de rigidez e amortecimento,  $k$  e  $c$ .  $a_0$  é a frequência adimensionalizada em função da frequência de excitação ( $\omega$ ) e da semi-largura de uma fundação retangular ( $B$ ).

$$a_0 = \omega B / c_s \quad (7)$$

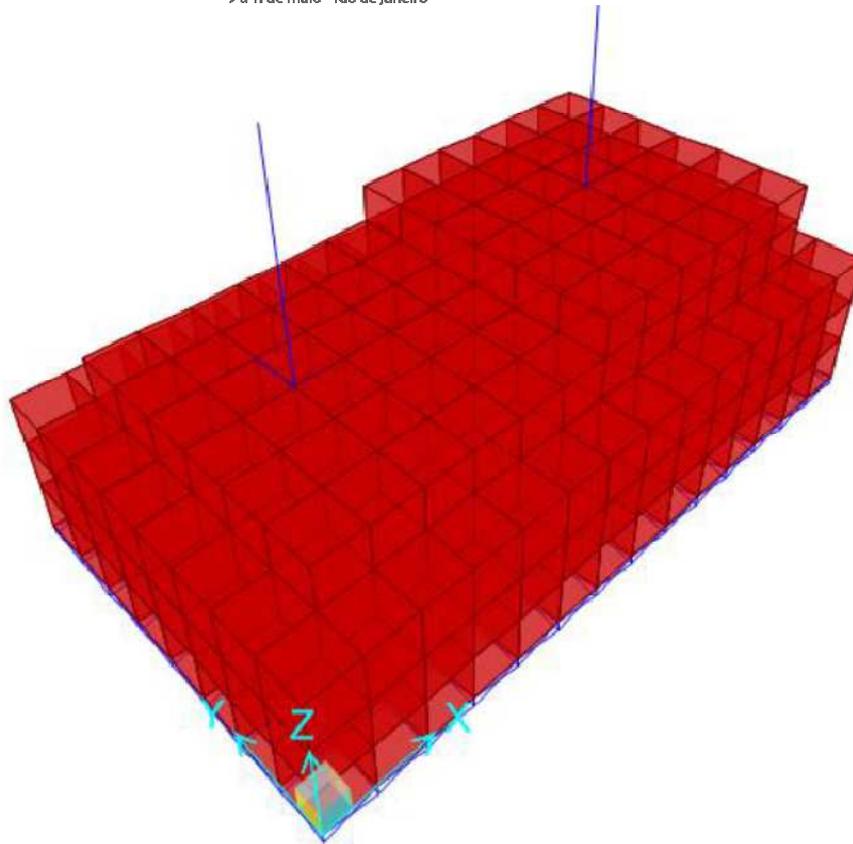
### **Apresentação do modelo e metodologia**

É analisada a base do bloco de fundação de uma máquina rotativa, baseado em um projeto real (ver ALBUQUERQUE, 2015), com dimensões em planta de 6,3 x 3,6 m, com origem do sistema de coordenadas cartesianas posicionada no centro geométrico da base da fundação. A fundação é apresentada em vista superior na Figura 1.

O modelo de elementos finitos utilizado na análise é apresentado na Figura 2.



**Figura 1 – Vista superior do bloco de fundação**



**Figura 2 – Modelo de elemntios finitos utilizado na análise do bloco**

A frequência da operação da máquina estudada é de 710 *rpm* (11,83 *Hz* ou 74,3 *rad/s*). O módulo de deformação transversal ( $G$ ), o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), a massa específica ( $\rho$ ) e velocidade de propagação da onda secundária do solo ( $c_s$ ), são dados abaixo:

$$G = 50000kPa$$

$$\nu = 0,5$$

$$\rho = 1,80Mg / m^3$$

$$c_s = 166,7m / s$$

A partir da equação (2), obtém-se a matriz de rigidez condensada da interface fundação-solo para diferentes frequências de operação ( $\omega$ ) da máquina.

Na hipótese de um bloco perfeitamente rígido, para uma carga vertical centrada, todos os pontos da base da fundação têm o mesmo deslocamento e, portanto, as molas calculadas na base da fundação assumem uma associação em paralelo. Sendo assim, o somatório de todos os coeficientes da matriz fornece uma rigidez equivalente, para o bloco considerado como perfeitamente rígido. Esta rigidez equivalente é então comparada com a obtida através de diferentes expressões aproximadas.

## Resultados

A Tabela 1 apresenta os coeficientes de rigidez ( $K$ ) na direção vertical ( $Z$ ), calculados para um quadrante da fundação, considerando  $\omega = 74,33 \text{ rad/s}$ , pela formulação de DOMÍNGUEZ e ABASCAL (1984), correspondendo a  $a_0 = 0,8$

Estes coeficientes repetem-se nos outros três quadrantes, devido à dupla simetria da base da fundação. Os nós de extremidade tem seus coeficientes reduzidos proporcionalmente à sua área de influência.

**Tabela 1 – Coeficientes de rigidez dos nós na direção Z**

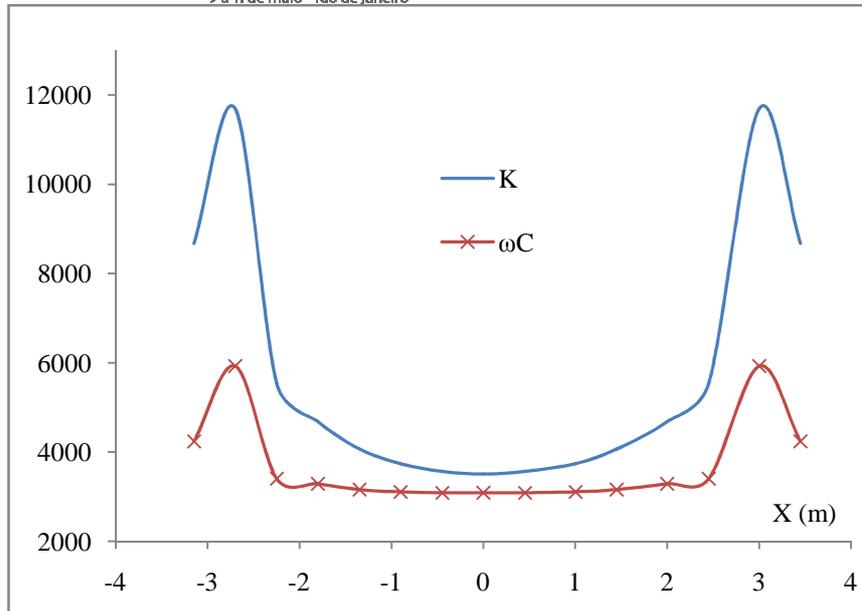
$K_z$ (kN/m)	X = 0	X = ±0,45	X = ±0,90	X = ±1,35	X = ±1,80	X = ±2,25	X = ±2,70	X = ±3,15
Y = 0	3505	3560	3736	4067	4676	5529	11691	8669
Y = ±0,45	3736	3791	3969	4303	4917	5770	12008	8897
Y = ±0,90	4311	4367	4546	4882	5494	6318	12804	9433
Y = ±1,35	9298	9386	9661	10167	11043	12264	19718	13254
Y = ±1,80	6971	7030	7216	7555	8127	8951	13077	8370

A Tabela 2 apresenta os coeficientes de amortecimento ( $C$ ) para um quadrante da fundação.

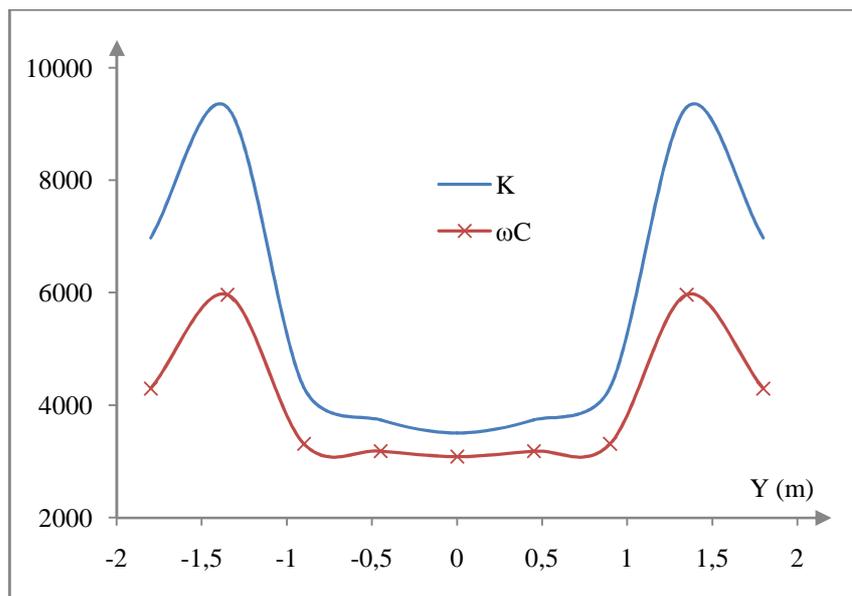
**Tabela 2 – Coeficientes de amortecimento dos nós na direção Z**

$\omega C_z$ (kN/m)	X = 0	X = ±0,45	X = ±0,90	X = ±1,35	X = ±1,80	X = ±2,25	X = ±2,70	X = ±3,15
Y = 0	41,46	41,54	41,81	42,43	44,17	45,70	79,67	56,99
Y = ±0,45	42,76	42,83	43,10	43,71	45,44	46,64	81,15	57,88
Y = ±0,90	44,51	44,57	44,79	45,31	46,91	47,71	83,08	59,44
Y = ±1,35	80,22	80,30	80,58	81,26	83,21	84,79	124,38	81,93
Y = ±1,80	57,74	57,79	57,98	58,44	58,44	60,97	82,61	51,88

As Figuras 3 e 4 apresentam a variação dos coeficientes  $K$  e  $\omega C$  ao longo de planos transversais ao bloco (planos  $y = 0$  e  $x = 0$ ).



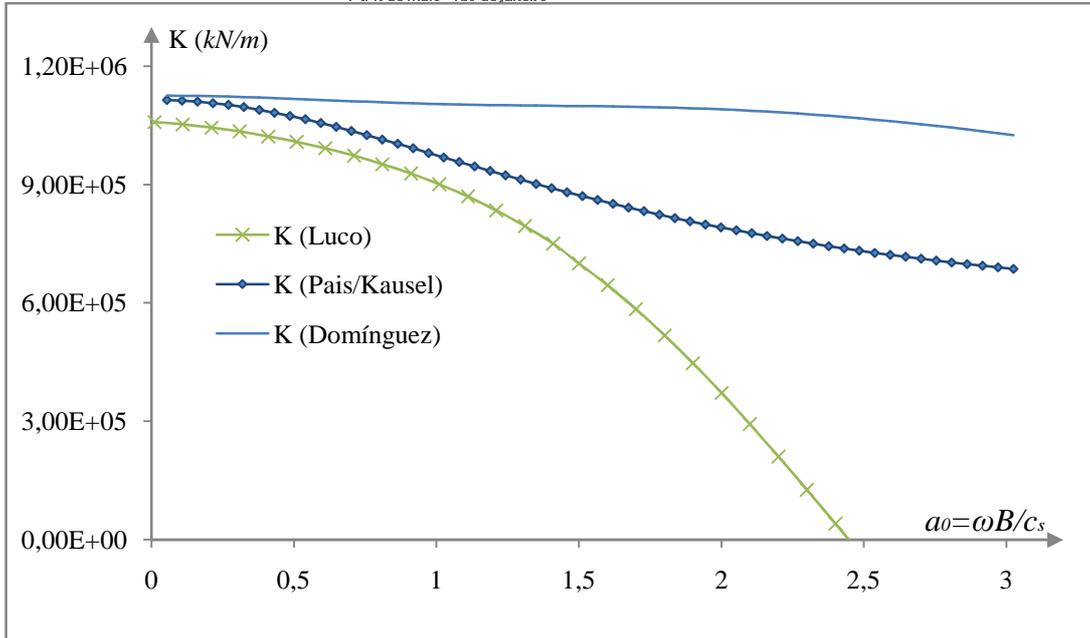
**Figura 3 – Coeficientes de rigidez dinâmica em  $y = 0$**



**Figura 4 – Coeficientes de rigidez dinâmica em  $x = 0$**

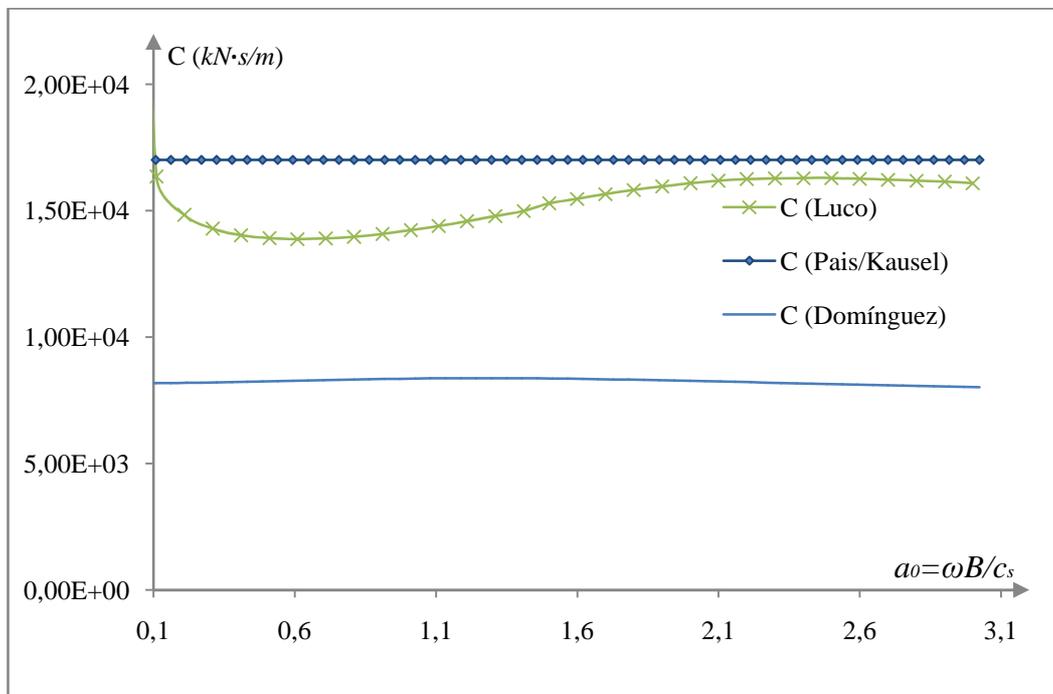
Observar que nos pontos de extremidade os valores estão divididos por dois, já que as áreas de influência nas bordas é a metade das demais áreas de influência.

O somatório de todos os termos da matriz de rigidez fornece a rigidez de um bloco perfeitamente rígido. A Figura 5 apresenta a variação da rigidez (K) calculada para blocos rígidos. A rigidez equivalente obtida através desta metodologia é comparada com as calculadas pelos métodos de PAIS e KAUSEL (1988) e LUCO (1974). Os valores negativos encontrados foram considerados como nulos.



**Figura 5 – Rigidez vertical para blocos rígidos**

A Figura 6 apresenta a comparação entre o amortecimento ( $C$ ) calculado através das mesmas metodologias.



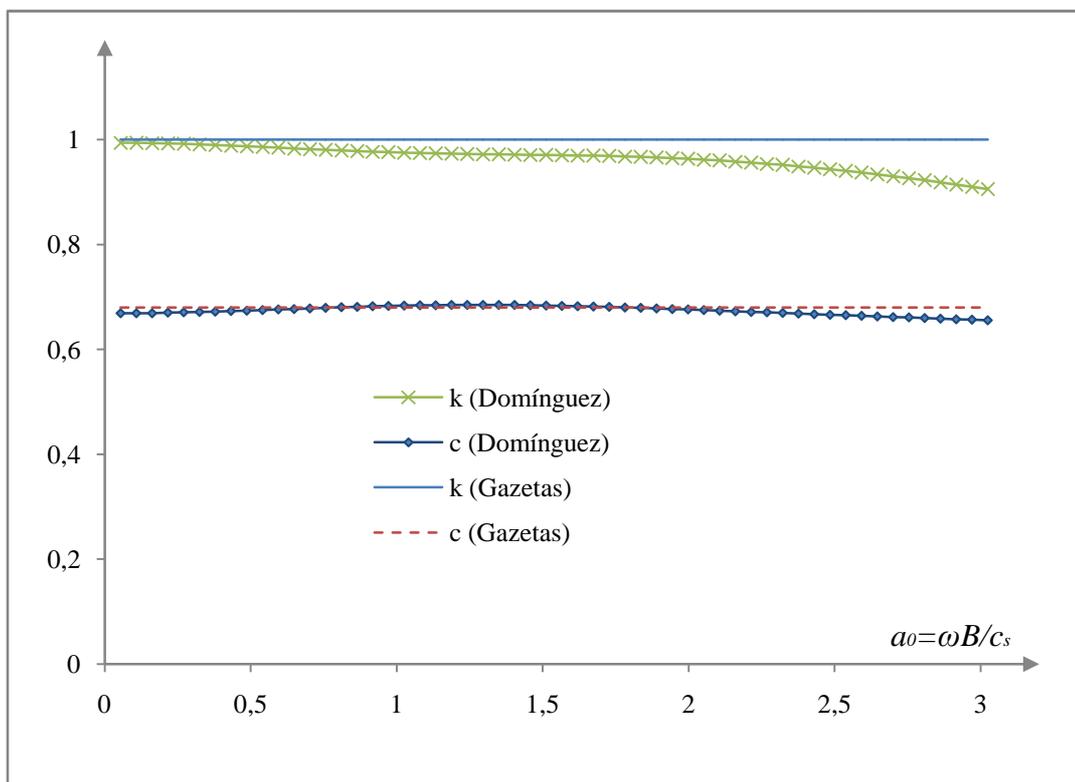
**Figura 6 – Amortecimento vertical para blocos rígidos**

A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos para o caso estático. Utilizou-se a expressão aproximada de WOLF e GAZETAS(1994) para fundações retangulares.

**Tabela 3 – Comparação entre funções de impedância.**

	$K_z$ ( $kN/m$ )	Discrepância Relativa (%)
K (Domínguez)	1131500	
K (Boussinesq)	1134500	0.3
K (Wolf e Gazetas)	1114716	1.5

A Figura 7 apresenta uma comparação da variação dos parâmetros  $k$  e  $c$  em função de  $a_0$ . Segundo GAZETAS (1983), para solo homogêneo, os parâmetros  $k$  e  $c$  podem ser considerados como constantes em 1,0 e 0,68, respectivamente.



**Figura 7 – Variação de  $k$  e  $c$  em função de  $a_0$**

## Conclusões

Os resultados das Figuras 3 e 4 comprovam que a distribuição dos coeficientes de amortecimento segue padrões similares aos da rigidez: o contorno da base da fundação representa a área de maior rigidez aos deslocamentos.

Os resultados sugerem que a hipótese de que a rigidez independe da frequência de vibração, comumente adotada em projetos de Engenharia, pode ser aceita como sendo uma aproximação razoável. Observa-se que a rigidez apresenta decaimento lento, chegando no exemplo estudado a 90% da rigidez estática em frequências na faixa dos  $250 \text{ rad/s}$  ( $\approx 2380 \text{ rpm}$ ). O amortecimento, por sua vez, apresenta comportamento oscilatório, porém com pequenos desvios.

Os parâmetros  $k$  e  $c$  obtidos através das expressões de DOMÍNGUEZ e ABASCAL (1984) concordam com o estudo feito por GAZETAS (1983) que sugerem que, para solos homogêneos, estes parâmetros se mantêm invariáveis em relação à frequência de excitação  $\omega$ . O parâmetro  $k$  apresentou decaimento lento, chegando a 0,90 quando  $a_0 = 3$ . Já o parâmetro  $c$  apresentou um pequeno aumento seguido de queda, com valores oscilando entre o valor médio de 0,67, próximo ao valor de 0,68 indicado por GAZETAS (1983).

## Referências bibliográficas

- ALBUQUERQUE, I. M. Modelagem numérica da fundação de uma máquina rotativa considerando rigidez e amortecimento do solo com distribuição não homogênea. M.Sc. – Dissertação, UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Programa de Projeto de Estruturas, Rio de Janeiro - RJ, Brasil, 2015.
- DOMÍNGUEZ, J. e ABASCAL, R. On fundamental solutions for the boundary integral equations method in static and dynamic elasticity, *Engineering Analysis*, 1984, Vol. 1, N° 3.
- GAZETAS, G. Analysis of machine foundation vibrations: state of the art, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy – NY, USA, 1983.
- LUCO, J. E. Impedance functions for a Rigid Foundation on a Layered Medium, *Nuclear Engineering and Design* 31, 1974.
- PAIS, A. e KAUSEL, E. Approximate formulas for dynamic stiffnesses of rigid foundations, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1988, Vol. 7, No. 4.
- RIBEIRO, M.A.C. Análise comparativa de métodos utilizados no cálculo da interação solo-radier. Projeto final de graduação, UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Rio de Janeiro, 2010.
- RICHART Jr.; Frank E.; WOODS, R.D.; HALL Jr., J.R. Vibrations of soils and foundations, 1ª ed.- Prentice-Hall, Inc., The University of Michigan, Ann Arbor – MI, USA, 1970.
- SANTOS, J., Apontamentos sobre Dinâmica de Fundações, mestrado em Geotecnia para Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico/Universidade Nova de Lisboa/LNEC, 2002.
- SANTOS, S.H.C. e GUIMARÃES, J. T. G. Análise de placas de fundação considerando a matriz de rigidez condensada na superfície, IX Congresso Latino-Americano e Ibérico sobre métodos computacionais para engenharia, Córdoba, Argentina, 1988.
- WOLF, J.P. Foundation vibration analysis using simple physical models. 1ª ed. – PTR Prentice Hall, University of Michigan – MI, USA, 1994.