



Análise do Efeito da Plastificação na Redistribuição de Esforços em Estruturas de Concreto Armado

Diego Filipe Craveiro de Souza Queiroz¹, Sérgio Hampshire de Carvalho Santos²

¹ Escola Politécnica da UFRJ / Departamento de Estruturas / diegosouza@poli.ufrj.br

² Escola Politécnica da UFRJ / Departamento de Estruturas / sergiohampshire@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem como finalidade apresentar análises plásticas de vigas e lajes de concreto armado por diferentes métodos e, assim, verificar o efeito da plastificação na redistribuição de esforços nestas estruturas. São apresentadas duas metodologias de cálculo para a determinação da capacidade de rotação plástica e, conseqüentemente, da computação da carga de ruptura, a qual é maior quando considerado o efeito da plastificação, fato muito importante para se prevenir o rompimento da estrutura e garantir seu correto funcionamento e ductilidade. A partir dos resultados obtidos, foram realizadas comparações utilizando-se os critérios da NBR 6118 (ABNT, 2014) para coeficientes de redistribuição de esforços, em que se verificou grande influência da relação entre altura da seção e comprimento do vão e pequena influência da resistência característica à compressão do concreto em ambos os métodos considerados. Os resultados demonstraram que estruturas menos esbeltas retornam valores de coeficientes menores, assim permitindo maior redistribuição de esforços do que estruturas mais esbeltas. Também se realizou uma análise comparativa do comprimento de rótula plástica considerado nas análises plásticas, considerando os propostos por diversos autores para se verificar a compatibilidade entre os valores estudados.

Palavras-chave

Concreto Armado; Análise Plástica; Análise Comparativa; Rótula Plástica.

1 Introdução

O aumento progressivo do carregamento em estruturas de concreto armado provoca o escoamento da armadura em um ou mais pontos críticos de momentos máximos. Por consequência, regiões chamadas de rótulas plásticas são originadas, as quais são caracterizadas por um aumento plástico da curvatura, associado ao aumento do carregamento. Elas estão concentradas em seções críticas e ocorrem em pequenos trechos, chamados de zonas de plastificação, onde o momento se mantém praticamente constante.

As seções não absorvem mais esforços adicionais, o que resulta no aumento das rotações. A estrutura não colapsa necessariamente a partir da formação da primeira rótula plástica, sendo necessária a formação de um mecanismo de colapso que torne a estrutura hipostática. Estruturas hiperestáticas possuem uma reserva de capacidade resistente, pois, para que tal mecanismo ocorra, é necessária a formação de mais de uma rótula plástica. Dado o excedente de resistência proveniente da plastificação, é muito importante se avaliar a capacidade de rotação plástica de elementos de concreto armado para se garantir um adequado comportamento estrutural. A redistribuição de esforços pode ser realizada quando a capacidade de rotação plástica é garantida nas seções críticas em estruturas suficientemente dúcteis. Assim, as cargas de ruptura obtidas em uma análise plástica são maiores do que aquelas obtidas em análises lineares.

O objetivo principal deste trabalho é analisar o efeito da plastificação na redistribuição de esforços, avaliando-se a capacidade de rotação plástica de vigas e lajes de concreto armado. A partir da análise plástica realizada, busca-se comparar os valores obtidos com os critérios preconizados pela NBR 6118 (ABNT, 2014), considerando diferentes relações de altura da seção e tamanho do vão, bem como diferentes resistências características do concreto. Outro objetivo igualmente importante é a comparação do comprimento de rótula plástica adotado neste trabalho com equações e valores propostos por formulações de outros pesquisadores.

A metodologia consiste na análise plástica de três estruturas biengastadas submetidas a um carregamento uniformemente distribuído, considerando três razões de h/l (altura total da seção e vão) distintas, de forma que as duas primeiras representam vigas com diferentes valores de esbeltez e a terceira simula uma relação típica de lajes (aproximadamente 1/50). As duas classes de resistência do concreto avaliadas são C20 e C30. O cálculo da rotação plástica é realizado por dois métodos. O primeiro consiste na consideração do ângulo de rotação plástica igual ao limite estabelecido pela Norma para a verificação da rotação máxima. No segundo, a rotação no engaste é avaliada por integração das curvaturas em um comprimento previamente definido de rótula plástica. O valor do momento negativo máximo que a estrutura suporta quando considerada a plastificação é calculado e, desta forma, o coeficiente de redistribuição de momentos δ é determinado para várias profundidades relativas de linha neutra. Com a obtenção dos valores de δ oriundos da análise, são realizadas comparações entre os resultados obtidos e os valores definidos na Norma.

A determinação dos parâmetros para o cálculo da rigidez à flexão elástica e plástica considera as curvas momento-curvatura das estruturas, obtidas por meio do programa CAPIBA-MK (SOUZA JUNIOR, 2012). Finalmente, comparam-se os valores de comprimento de rótula pré-estabelecidos nas análises plásticas do trabalho com os de fórmulas elaboradas por outros autores, a fim de se determinar a consistência daqueles com a literatura, uma vez que esta definição é essencial para o cálculo da rotação plástica.

Este trabalho resume o Projeto de Graduação (QUEIROZ, 2019) apresentado pelo primeiro autor, sob a orientação do segundo autor.

2 Comprimento de rótula plástica

Define-se o comprimento de rótula plástica como sendo um comprimento equivalente, onde é definida uma curvatura plástica considerada como constante para a integração das curvaturas da seção transversal ao longo deste comprimento, a fim de se determinar as capacidades de rotação de um elemento estrutural de concreto armado. A performance de uma rótula plástica está intimamente ligada à capacidade de resistência e de deformação da estrutura (ZHAO et al., 2011). Desta forma, um ponto crucial do problema a ser solucionado é a definição de sua extensão.

Segundo ARBULU (2006), diversos estudos realizados em estruturas de concreto armado demonstraram que o comprimento equivalente de uma rótula plástica é função das dimensões do elemento estudado, isto é, altura da seção da viga e comprimento do vão. Além da geometria da estrutura, também se estudou o efeito de cargas axiais e o efeito de *strain hardening* (encruamento do material após o escoamento do aço), entretanto ainda não está claro quais parâmetros são mais relevantes para determinação do comprimento de rótula plástica.

Outros parâmetros importantes para o cálculo do comprimento de rótula plástica são propriedades relativas às armaduras como a tensão de escoamento e o diâmetro das barras (ARBULU, 2006).

O conceito de comprimento de rótula plástica pode ser entendido estudando o deslocamento na extremidade de um elemento em balanço, em que o deslocamento total Δ pode ser dividido em uma parcela elástica e outra plástica. Assume-se que a curvatura inelástica na região plastificada é constante ao longo do comprimento de rótula plástica. Assim, considerando a curvatura no escoamento do aço ϕ_y , a curvatura total no momento da ruptura ϕ , o comprimento total L do elemento e comprimento da rótula plástica L_p , o deslocamento total na extremidade do balanço é dado pela fórmula a seguir:

$$\Delta = \frac{\phi_y L^2}{3} + (\phi - \phi_y) L_p \left(L - \frac{L_p}{2} \right) \quad (1)$$

3 Tipos de análise estrutural

3.1 Análise linear com redistribuição

Nesta análise, os efeitos das ações são redistribuídos na estrutura, considerando-se combinações do Estado-Limite Último (ELU), segundo a NBR 6118 (2014). Tais efeitos são previamente calculados em uma análise linear.

O item 14.6.4.3 da NBR 6118 (2014) define limites para a posição da linha neutra no ELU, a fim de proporcionar o adequado comportamento dúctil em vigas e lajes. Assim, para concretos com valores de resistência característica à compressão f_{ck} inferiores a 50 MPa, considerados neste artigo, o limite é dado por:

$$x/d \leq 0,45 \quad (2)$$

Na equação 2, x representa a profundidade da linha neutra e d é a altura útil da seção. Além disso, a NBR 6118 (2014) define que, dada uma redistribuição de momentos, em que o momento fletor M é reduzido para δM em uma seção transversal, a profundidade relativa da linha neutra nesta seção, simbolizada por k_x , deve ser limitada. O limite para concretos com f_{ck} menor do que 50 MPa é dado pela fórmula a seguir.

$$k_x = x/d \leq (\delta - 0,44)/1,25 \quad (3)$$

A redistribuição deve obedecer ao limite $\delta \geq 0,75$ para todos os casos.

3.2 Análise plástica

O item 14.6.4.4 da NBR 6118 (2014) estabelece uma limitação para a rotação nas rótulas plásticas localizadas nas seções críticas em análises plásticas. A Figura 1 apresenta os limites para a capacidade de rotação plástica fornecidos pela Norma, dados em função de x/d .

Esta figura considera a relação $a/d = 3$, em que $a = M_{sd}/V_{sd}$, sendo M_{sd} o momento fletor solicitante na seção analisada e V_{sd} a força cortante solicitante nesta seção. Para demais relações do fator a/d , todos os valores extraídos da Figura 1 devem ser multiplicados pelo fator $\sqrt{(a/d)/3}$. Assim, segue-se a relação, em que $\theta_{max,adm}$ representa a rotação plástica admissível e θ_{pl} é a rotação plástica retirada da Figura 1 da NBR 6118 (ABNT, 2014).

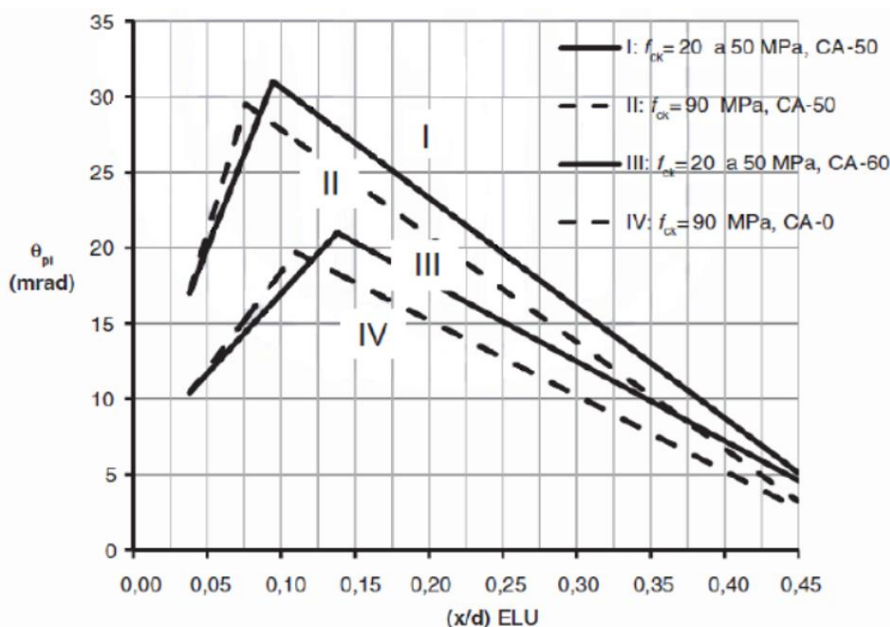


Figura 1 – Capacidade de rotação de rótulas plásticas (ABNT, 2014)

$$\theta_{max,adm} = \theta_{pl} \sqrt{\frac{(a/d)}{3}} \quad (4)$$

A Norma dispensa a verificação explícita da capacidade de rotação plástica quando a posição da linha neutra obedece a seguinte relação, para concretos com f_{ck} menor do que 50 MPa:

$$x/d \leq 0,25 \quad (5)$$

Adicionalmente, a análise de esforços na análise plástica em elementos de placa pode ser realizada pela Teoria das Charneiras Plásticas no ELU. As condições apropriadas de ductilidade são garantidas ao se satisfazer a equação 5, o que torna a verificação explícita da capacidade de rotação plástica dispensável.

4 Métodos de análise plástica

Duas formulações foram aplicadas neste trabalho para a determinação do coeficiente de redistribuição de momentos δ , computado a partir da determinação de rotação plástica do elemento estrutural.

4.1 Método 1

Este método considera uma viga biengastada de comprimento l e seção transversal de altura h , base b e altura útil d , sujeita a um carregamento q uniformemente distribuído em toda estrutura. O momento negativo máximo nos engastes tem valor igual a $ql^2/12$ e o momento positivo máximo, no meio do vão, é igual a $ql^2/24$. A estrutura atinge o escoamento nas regiões de momento negativo máximo (engastes).

São consideradas diversas relações de x/d , de forma que para cada uma delas se determina o momento de cálculo de projeto M_d e a área de armadura do aço A_s , computados a partir das definições normativas no ELU para o dimensionamento à flexão simples. A distribuição de tensões segue um diagrama retangular simplificado com profundidade dada por $y = 0,8x$, sendo x a profundidade da linha neutra e com tensão máxima igual a $0,85 f_{cd}$. A partir deste cálculo, são obtidos os respectivos diagramas momento-curvatura com o programa CAPIBA-MK (SOUZA JUNIOR, 2012). A seguir, as Figuras 2 e 3 representam, respectivamente, o diagrama momento-curvatura idealizado e o real obtido com o CAPIBA-MK.

O comportamento da viga biengastada pode ser melhor entendido considerando-se uma viga biapoiada sujeita ao carregamento distribuído q e também aos momentos de extremidade de valor M , tais que estes anulem as rotações nos apoios. Os momentos M terão valor negativo nos engastes.

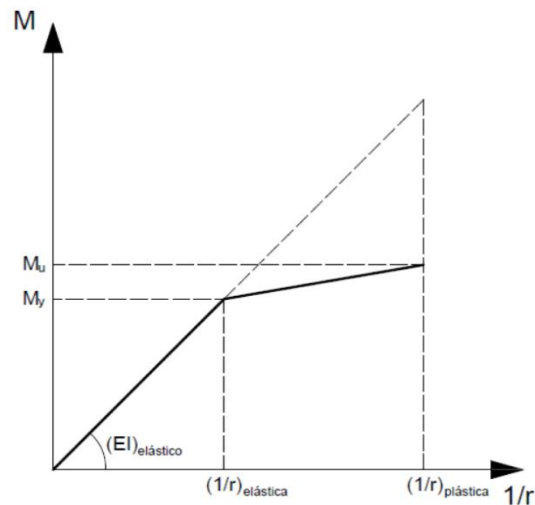


Figura 2 – Diagrama momento-curvatura bilinear idealizado do concreto armado.

As equações do ângulo de rotação nos apoios para uma viga sujeita ao carregamento q (θ_{carga}) e sujeita aos momentos concentrados M (θ_M) são expressas a seguir.

$$\theta_{carga} = \frac{ql^2}{24(EI)_{elástico}} \quad (6)$$

$$\theta_M = \frac{Ml}{2(EI)_{elástico}} \quad (7)$$

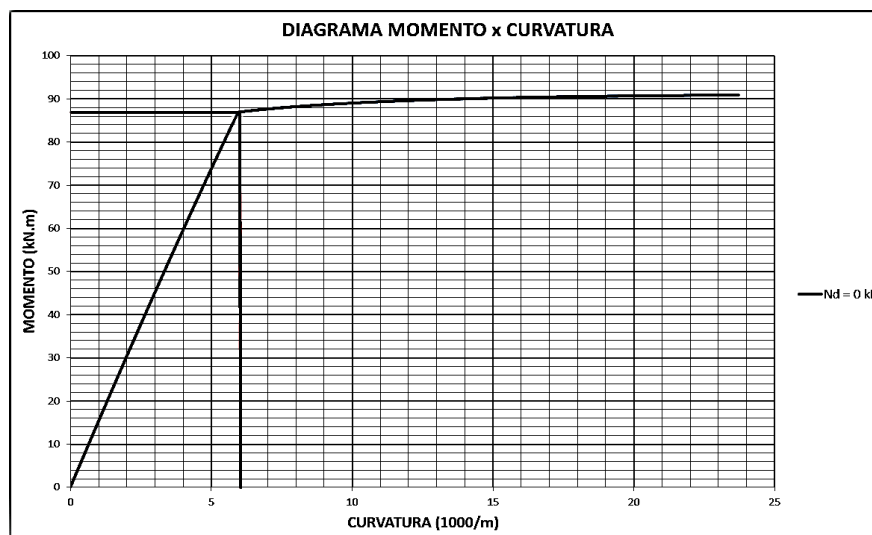


Figura 3 – Exemplo de obtenção do par momento-curvatura elástico no programa CAPIBA-MK

Nota-se que no problema elástico linear, a igualdade entre as equações 6 e 7 conduz ao valor trivial do momento no engaste igual a $ql^2/12$. A consideração anterior não é mais válida para momentos superiores a M_y , assim, surge uma rotação adicional. A viga se deforma em regime plástico a partir da curvatura elástica $(1/r)_{elástica}$ (curvatura na seção no instante do escoamento das armaduras) até a curvatura plástica $(1/r)_{plástica}$ (curvatura total da seção). Esta corresponde ao momento de ruptura M_u . Observa-se pela Figura 2 que o valor de $(1/r)_{elástica}$ pode ser obtido diretamente através do diagrama momento-curvatura simplificado.

$$(EI)_{elástico} = \frac{M_y}{(1/r)_{elástica}} \quad (8)$$

Os valores de momentos e curvaturas destes dois pontos notáveis são obtidos a partir dos diagramas momento-curvatura gerados pelo programa CAPIBA-MK (SOUZA JUNIOR, 2012). Porém, a rotação plástica θ_{pl} é dada pelos limites da NBR 6118 (ABNT, 2014).

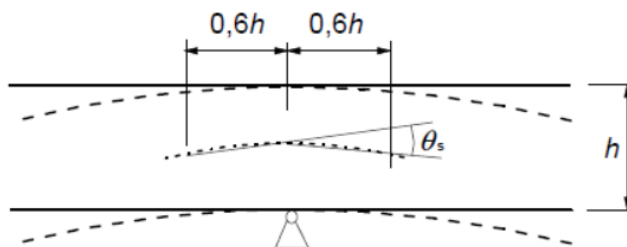


Figura 4 – Rotação plástica em uma seção de concreto armado de uma viga contínua ou laje contínua armada em uma direção (CEN, 2004).

A Figura 4 apresenta o critério do EUROCÓDIGO 2 (CEN, 2004) para vigas contínuas e lajes contínuas armadas numa direção, em que a capacidade de rotação é avaliada em um comprimento igual a 1,2 vezes a altura da seção h . A figura em questão ilustra a rotação plástica de uma viga ou laje contínuas, que é análoga à situação do engaste perfeito em um comprimento $0,6h$. Assim, a fim de se realizar a correta compatibilização das rotações, considera-se a metade do valor obtido na Figura 1. Tem-se a seguinte equação de compatibilização:

$$\theta_{carga} = \theta_M + \frac{\theta_{max,adm}}{2} \quad (9)$$

Desta forma, pode-se obter a carga máxima de projeto q_d por meio da equação 6 invertida. A partir disso, determina-se o valor de M_{d0} , que é o valor do momento negativo máximo que a viga biengastada suporta elasticamente antes da plastificação, dado pela equação 10.

$$M_{d0} = \frac{q_d l^2}{12} \quad (10)$$

A estrutura está sujeita ao momento M_{d0} que, após a redistribuição de esforços, se reduz para o momento M_d , que é o valor considerado para o dimensionamento da estrutura. Assim, calcula-se o valor do coeficiente de redistribuição de esforços para o Método 1, simbolizado por δ_1 , dado pela razão entre o momento correspondente ao limite da análise elástica linear e M_{d0} .

$$\delta_1 = \frac{M_d}{M_{d0}} \quad (11)$$

O cálculo descrito anteriormente é realizado para valores de K_x que variam entre 0,05 e 0,45.

4.2 Método 2

As hipóteses consideradas no item 4.1 são novamente aceitas neste método, tendo em vista tratar-se da mesma estrutura. Entretanto, o cálculo da rotação plástica θ_{pl} não segue mais os limites estabelecidos pela NBR 6118 (ABNT, 2014) para a rotação máxima permitida.

Considera-se agora uma zona plastificada próxima aos engastes, nas regiões de momento negativo máximo, onde ocorre o escoamento da armadura e surge a rótula plástica de comprimento l_{pl} . A capacidade de rotação plástica é definida como a diferença entre a rotação correspondente à carga última e a rotação verificada no início do escoamento das armaduras. Desta forma, a rotação plástica é calculada como a integral da curvatura após o escoamento das armaduras, a ser concentrada na região crítica dos engastes.

$$\theta_{pl} = \int_0^{l_{pl}} \left(\left(\frac{1}{r} \right)_{plástica} - \left(\frac{1}{r} \right)_{elástica} \right) dx \quad (12)$$

A determinação da área da integral da curvatura segue um modelo simplificado, com a área substituída por um triângulo cujas dimensões são a diferença entre as curvaturas plástica e elástica, que são tomadas no diagrama momento-curvatura gerado pelo programa CAPIBA-MK (SOUZA JUNIOR, 2012), referente aos momentos de ruptura e escoamento, respectivamente, e o comprimento de rótula. É considerado o dobro do comprimento rótula, que o EUROCÓDIGO 2 (CEN, 2004) define como sendo igual a $2 \times l_{pl} = 2 \times 0,6h = 1,2h$ como visto anteriormente. A situação de engaste perfeito se materializa em uma viga contínua, o que justifica a consideração dos dois lados do engaste.

O comprimento de rótula $0,6h$ é convencional e não expressa a distância real entre os momentos de escoamento e ruptura, pois, teoricamente, tal distância é muito menor. Ambos se encontram muito próximos pela sua pequena diferença em magnitude. Caso a distância real entre ambos fosse levada em consideração para a obtenção das curvaturas, a área obtida nesta integral seria pequena e a capacidade de rotação plástica seria igualmente pequena, fato que não corresponde à realidade, uma vez que tais estruturas possuem uma capacidade de rotação plástica considerável.

A rotação plástica pode ser considerada como o somatório das rotações provocadas pelo escoamento da armadura em cada fissura de uma seção crítica. Assim, comprimento de rótula $l_{pl} = 0,6h$ é justificado pela fissuração da zona plastificada, tendo em vista que este comprimento é considerado como compatível com a ocorrência de fissuras na região. A capacidade de rotação plástica será então dada por:

$$\theta_{pl} = 0,6h \left(\left(\frac{1}{r} \right)_{plástica} - \left(\frac{1}{r} \right)_{elástica} \right) \quad (13)$$

Para o Método 2, tem-se a equação de compatibilização a seguir:

$$\theta_{carga} = \theta_M + \theta_{pl} \quad (14)$$

Assim, novamente a carga de projeto q_d é obtida por meio da equação 6. A partir disso, determina-se o valor de M_{d0} pela equação 10 e, finalmente, o valor do coeficiente de redistribuição de momento para o Método 2, denotado por δ_2 , pela equação 11.

5 Determinação do coeficiente de redistribuição

Neste estudo, três estruturas distintas com a mesma seção transversal, porém com diferentes valores de vão são consideradas. As duas primeiras estruturas representam vigas com diferentes razões de h/l e a terceira possui uma razão h/l característica de lajes (1/50). Todas as três estruturas têm altura de 55 cm, mas com vãos de 9,00 m, 4,50 m e 27,00 m, sendo representadas pelas nomenclaturas VIGA 1, VIGA 2 e LAJE, respectivamente. Ressalta-se que os valores escolhidos para os vãos buscam simular razões h/l próximas da realidade.

São feitas análises para resistência característica do concreto $f_{ck} = 20$ MPa e $f_{ck} = 30$ MPa. Para as armaduras considera-se o aço CA-50. Ao final de cada análise, comparam-se os resultados com os valores obtidos com os critérios da NBR 6118 (ABNT, 2014) descritos no item 3.1.

A seguir, apresentam-se na Tabela 1 os dados utilizados para a análise das três estruturas para diversos valores de x/d e na Tabela 2 os respectivos dimensionamentos usuais da armadura de aço, como exemplo, em que ambas consideram $f_{ck} = 20$ MPa. Como a seção transversal das três estruturas é a mesma e apenas os vãos são distintos, elas apresentarão os mesmos valores de M_d e A_s . Portanto, os valores de curvatura e momento retirados dos diagramas momento-curvatura do programa CAPIBA-MK (SOUZA JUNIOR, 2012) não mudam entre os casos considerados, uma vez que todos possuem os mesmos valores das grandezas solicitadas pelo programa.

Tabela 1 – Dados das três relações de h/l consideradas (concreto classe C20).

Dados	VIGA 1	VIGA 2	LAJE
b (m)	0,20	0,20	0,20
h (m)	0,55	0,55	0,55
d' (m)	0,05	0,05	0,05
d (m)	0,50	0,50	0,50
l (m)	9,00	4,50	27,00
h/l	0,06	0,12	0,02
f_{ck} (MPa)	20,00	20,00	20,00
f_{yk} (kN/cm ²)	50,00	50,00	50,00

Tabela 2 – Dimensionamento usual das estruturas de concreto C20.

kx	kmd	Md (kNm)	kz	As (cm ²)
0,05	0,033	23,57	0,980	1,11
0,10	0,065	46,43	0,960	2,22
0,15	0,096	68,57	0,940	3,36
0,20	0,125	89,29	0,920	4,46
0,25	0,153	109,29	0,900	5,59
0,30	0,180	128,57	0,880	6,72
0,35	0,205	146,43	0,860	7,83
0,40	0,228	162,86	0,840	8,92
0,45	0,251	179,29	0,820	10,06

Apresentam-se os resultados obtidos para a VIGA 1 como exemplo. A Tabela 3 apresenta os valores dos coeficientes de redistribuição da VIGA 1 considerando concreto de classe C20 no Método 1, enquanto a Tabela 4 apresenta os valores obtidos no Método 2.

Tabela 3 – Resultados de δ_1 da VIGA 1 com concreto C20 (Método 1).

kx	My (kNm)	1/r elástica (1000/m)	EI elástico (kNm ²)	$\theta_{max,adm}$ (mrad)	$\theta_{max,adm}/2$ (mrad)	θ_m (mrad)	θ_{carga} (mrad)	qd (kN/m)	Md0 (kNm)	δ_1
0,05	23,57	5,0648	4693	20,00	10,00	22,60	32,60	5,04	34,00	0,693
0,10	46,68	5,6828	8214	30,50	15,25	25,43	40,68	11,00	74,27	0,625
0,15	64,83	5,9945	10815	27,00	13,50	28,53	42,03	14,97	101,02	0,679
0,20	86,02	6,4056	13429	23,00	11,50	29,92	41,42	18,31	123,60	0,722
0,25	106,38	6,8455	15540	19,70	9,85	31,65	41,50	21,23	143,50	0,763
0,30	123,15	7,2928	16887	16,00	8,00	34,26	42,26	23,50	158,59	0,811
0,35	142,12	7,6484	18582	12,50	6,25	35,46	41,71	25,52	172,24	0,850
0,40	160,23	8,0746	19844	8,50	4,25	36,93	41,18	26,90	181,60	0,897
0,45	177,19	8,5853	20639	5,00	2,50	39,09	41,59	28,26	190,75	0,940

Tabela 4 – Resultados de δ_2 da VIGA 1 com concreto C20 (Método 2).

kx	My (kNm)	EI elástico (kNm ²)	θ_m (mrad)	1/r elástica (1000/m)	1/r plástica (1000/m)	θ_{pl} (mrad)	θ_{carga} (mrad)	qd (kN/m)	Md0 (kNm)	δ_2
0,05	23,57	4693	22,60	5,0648	21,9175	5,56	28,16	4,35	29,37	0,803
0,10	46,68	8214	25,43	5,6828	23,1508	5,76	31,20	8,44	56,95	0,815
0,15	64,83	10815	28,53	5,9945	24,1560	5,99	34,53	12,29	82,98	0,826
0,20	86,02	13429	29,92	6,4056	25,3604	6,26	36,17	15,99	107,95	0,827
0,25	106,38	15540	31,65	6,8455	26,7478	6,57	38,21	19,55	131,97	0,828
0,30	123,15	16887	34,26	7,2928	23,7000	5,41	39,68	22,06	148,89	0,864
0,35	142,12	18582	35,46	7,6484	20,1591	4,13	39,59	24,22	163,48	0,896
0,40	160,23	19844	36,93	8,0746	17,5278	3,12	40,05	26,16	176,61	0,922
0,45	177,19	20639	39,09	8,5853	15,5037	2,28	41,37	28,11	189,76	0,945

6 Resultados das análises

A fim de se realizar uma comparação direta entre as recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2014) e os dois métodos apresentados neste trabalho, apresentam-se tabelas que comparam os valores de δ para as três estruturas e as duas classes de concreto definidas no item 5.

A Tabela 5 apresenta todos os resultados da VIGA 1. Observa-se que o Método 1 retorna valores de δ menores do que os da Norma para quase todos os valores de k_x , excetuando-se $k_x = 0,25$, enquanto o Método 2 retorna valores de δ maiores do que os da Norma para todos os valores de k_x até 0,35. Os resultados se repetem de forma muito próxima em ambas as classes C20 e C30 como visto na Tabela 5. A Figura 5 apresenta o gráfico da VIGA 1 para classe C20, que é idêntico ao gráfico da classe C30. Os critérios normativos são conservadores relativamente à avaliação mais precisa do Método 2.

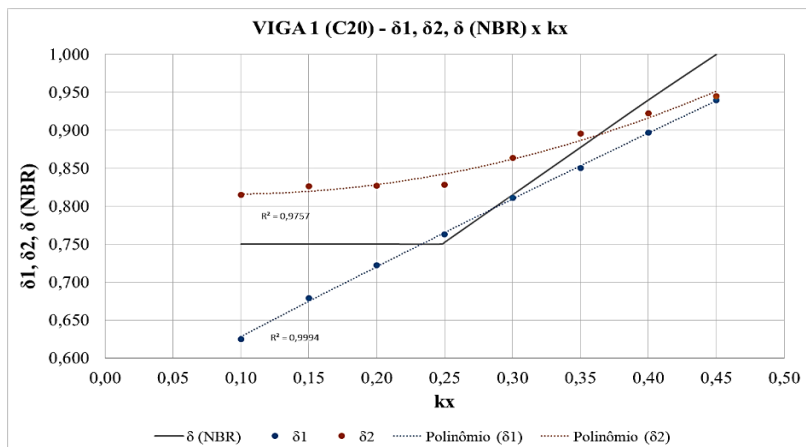


Figura 5 – Gráfico do coeficiente δ em função de k_x da VIGA 1 com concreto C20.

Tabela 5 – Resultados do coeficiente δ da VIGA 1 (concreto classe C30)

VIGA 1 (C20)						VIGA 1 (C30)					
k_x	δ_1	δ_2	δ (NBR)	δ_1 / δ	δ_2 / δ	k_x	δ_1	δ_2	δ (NBR)	δ_1 / δ	δ_2 / δ
0,05	0,693	0,803	0,750	0,924	1,070	0,05	0,693	0,803	0,750	0,924	1,070
0,10	0,625	0,815	0,750	0,834	1,087	0,10	0,634	0,821	0,750	0,845	1,094
0,15	0,679	0,826	0,750	0,905	1,102	0,15	0,675	0,824	0,750	0,900	1,098
0,20	0,722	0,827	0,750	0,963	1,103	0,20	0,725	0,829	0,750	0,967	1,105
0,25	0,763	0,828	0,753	1,013	1,101	0,25	0,764	0,830	0,753	1,015	1,103
0,30	0,811	0,864	0,815	0,995	1,060	0,30	0,807	0,864	0,815	0,990	1,060
0,35	0,850	0,896	0,878	0,969	1,021	0,35	0,850	0,896	0,878	0,969	1,021
0,40	0,897	0,922	0,940	0,954	0,981	0,40	0,897	0,922	0,940	0,954	0,981
0,45	0,940	0,945	1,000	0,940	0,945	0,45	0,940	0,944	1,000	0,940	0,944

Os resultados da VIGA 2 para concreto de classe C20 são apresentados na Tabela 6. Neste caso, ambos os métodos fornecem resultados de δ menores do que os valores previstos pela Norma para todos os valores de k_x , o que é ilustrado pela Figura 6. Novamente, as duas classes de concreto retornam valores de δ muito próximos em ambos os métodos da VIGA 2. Logo, os critérios normativos são sempre conservadores.

Tabela 6 – Resultados do coeficiente δ da VIGA 2 com concreto C20.

k_x	δ_1	δ_2	δ (NBR)	δ_1 / δ	δ_2 / δ
0,05	0,531	0,670	0,750	0,707	0,894
0,10	0,455	0,688	0,750	0,606	0,917
0,15	0,514	0,704	0,750	0,685	0,939
0,20	0,565	0,705	0,750	0,754	0,940
0,25	0,616	0,707	0,753	0,819	0,939
0,30	0,682	0,760	0,815	0,836	0,932
0,35	0,739	0,811	0,878	0,843	0,924
0,40	0,813	0,855	0,940	0,865	0,910
0,45	0,887	0,895	1,000	0,887	0,895

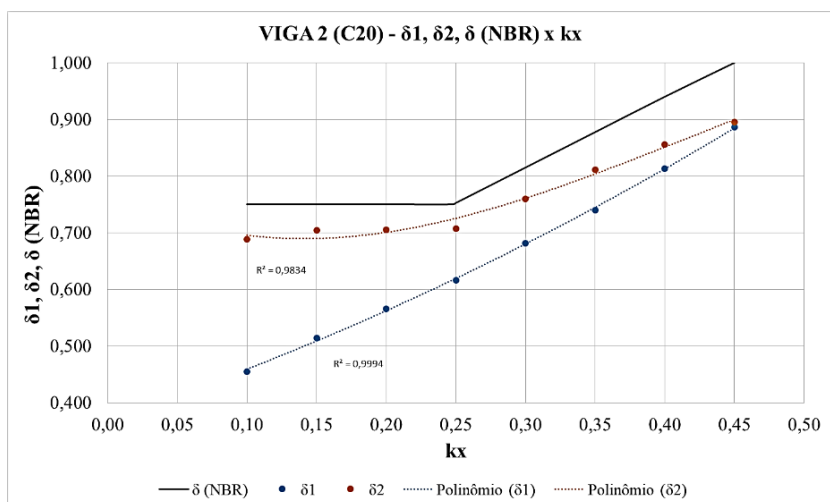


Figura 6 – Gráfico do coeficiente δ em função de k_x da VIGA 2 com concreto C20.

Finalmente, os resultados da LAJE para concreto de classe C20 são apresentados na Tabela 7. Para este último caso, ambos os métodos fornecem resultados de δ maiores do que os da Norma para quase todos os valores de k_x , o que é evidenciado na Figura 7. Novamente, os valores obtidos para as duas classes de concreto estudadas nos dois métodos para a LAJE são muito similares, igualmente ao que ocorreu para a VIGA 1 e VIGA 2. Os critérios normativos seriam sempre não conservadores, o que justifica a limitação normativa de $k_x = 0,25$ para o cálculo plástico pelo Método das Charneiras Plásticas.

Tabela 7 – Resultados do coeficiente δ da LAJE com concreto C20.

k_x	δ_1	δ_2	δ (NBR)	δ_1 / δ	δ_2 / δ
0,05	0,871	0,924	0,750	1,162	1,232
0,10	0,833	0,930	0,750	1,111	1,240
0,15	0,864	0,935	0,750	1,152	1,246
0,20	0,886	0,935	0,750	1,182	1,246
0,25	0,906	0,935	0,753	1,204	1,243
0,30	0,928	0,950	0,815	1,138	1,166
0,35	0,945	0,963	0,878	1,076	1,097
0,40	0,963	0,973	0,940	1,025	1,035
0,45	0,979	0,981	1,000	0,979	0,981

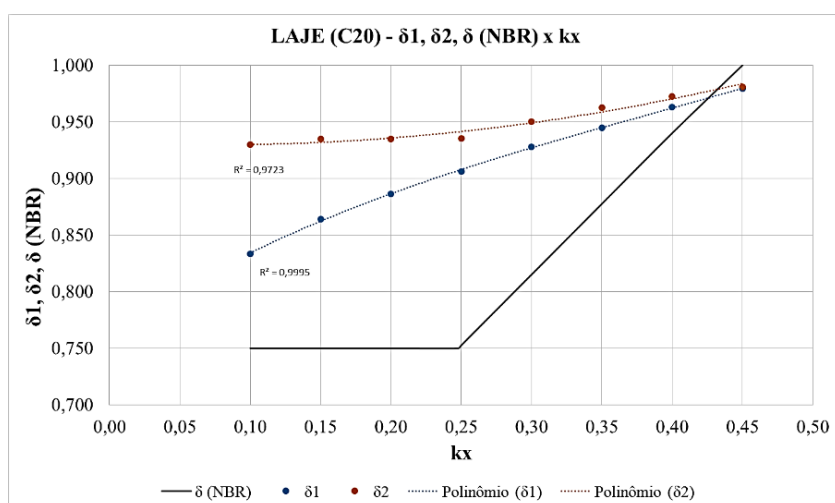


Figura 7 – Gráfico do coeficiente δ em função de k_x da LAJE com concreto C20.

6.1 Exemplos de avaliação do comprimento de rótula

O comprimento de rótula plástica é um dado essencial para a avaliação da capacidade de rotação plástica. Portanto, é muito importante se utilizar um valor compatível com a realidade. O valor aqui utilizado para o

comprimento de rótula plástica foi igual a $0,6h = 0,33$ m. A fim de se avaliar a validade deste valor nas análises plásticas apresentadas, este valor é confrontado com os obtidos com fórmulas de outros autores. Para este exemplo, foi considerado o caso $k_x = 0,25$ da VIGA 1 e com concreto de classe C20. A Tabela 8 apresenta todos os dados utilizados para o cálculo do comprimento de rótula plástica L_p . Todas as grandezas utilizadas foram descritas anteriormente com exceção de d_b , que representa a bitola da armadura utilizada no dimensionamento e L_s , que é a distância da seção de momento máximo até a seção de momento nulo. O cálculo desta segunda grandeza é realizado considerando a extensão do trecho de momento negativo da viga biengastada. O momento fletor de uma viga biengastada de comprimento L sujeita a um carregamento uniformemente distribuído q_d , em função da distância horizontal x , é dado pela equação (15).

$$M(x) = -\frac{q_d x^2}{2} + \frac{q_d L x}{2} - \frac{q_d L^2}{12} \quad (15)$$

A distância da seção de momento negativo máximo até a seção de momento nulo pode ser obtido igualando-se a equação 15 a zero. Desta forma, obtém-se $L_s = 0,211L$. Para a estrutura VIGA 1, portanto, $L_s = 1,90$ m. Os momentos no escoamento M_y e na ruptura M_u foram obtidos pelo programa CAPIBA-MK (SOUZA JUNIOR, 2012), bem como os valores de deformações específicas no escoamento ϵ_{ce} e na ruptura ϵ_{cu} .

Tabela 8 – Dados utilizados para o cálculo do comprimento de rótula plástica.

k_x	0,25	M_y (kNm)	106,38
b (m)	0,20	M_u (kNm)	110,71
h (m)	0,55	f_y (MPa)	500
d (m)	0,50	d_b (mm)	5
L (m)	9,00	ϵ_{ce}	0,00134
$L_s = z$ (m)	1,90	ϵ_{cu}	0,00339

A Tabela 9 lista formulações propostas por alguns autores para o comprimento de rótula plástica L_p em vigas, onde se observam as equações propostas, os parâmetros usados em cada modelo e o resultado de comprimento de rótula obtido a partir de cada uma para a estrutura considerada.

Tabela 9 – Comprimentos de rótula plástica obtidos a partir das referências.

REFERÊNCIA	FORMULAÇÃO PROPOSTA	PARÂMETROS	L_p (m)
BAKER (1956)	$L_p = kd \left(\frac{z}{d}\right)^{1/4}$ $0,5h < L_p < h$	Altura da seção	0,3940 ($k = 0,5$)
SAWYER (1964)	$L_p = 0,25d + 0,075L_s$	Altura da seção, vão, deformação plástica	0,2674
CORLEY (1966)	$L_p = 0,5d + 0,032 \frac{L_s}{\sqrt{d}}$	Altura da seção, vão	0,3359
MATTOCK (1967)	$L_p = 0,5d + 0,05L_s$	Altura da seção, vão	0,3450
ASI-ASCE Committee 428 (1968)	$\text{Min} \left[R_s \left(\frac{d}{4} + 0,03L_s R_m \right), R_s d \right] \leq L_p \leq R_s \left(\frac{d}{2} + 0,10 L_s R_m \right)$	Altura da seção, vão, deformação plástica	$0,2361 \leq L_p \leq 0,5708$
PAULAY e PRIESTLEY (1992)	$L_p = 0,08L_s + 0,022f_y d_b \geq 0,044f_y d_b$	Altura da seção, vão, propriedades da armadura	0,2069
PANAGIOTAKOS e FARDIS (2001)	$L_{p,cy} = 0,12L_s + 0,014a_{sl}f_y d_b$ $L_{p,mon} = 1,5L_{p,cy} = 0,18L_s + 0,02a_{sl}f_y d_b$	Vão, propriedades da armadura	0,3918
EUROCÓDIGO 2 (2010)	$L_p = 0,6h$	Altura da seção	0,3300

7 Conclusões

Este artigo apresentou dois métodos de cálculo para a determinação do coeficiente de redistribuição de esforços considerando a plastificação em estruturas de concreto armado, determinando-se a sua capacidade de rotação plástica. Uma análise comparativa foi feita entre os dois métodos e os valores preconizados pela NBR 6118 (ABNT, 2014). Também se realizou uma análise comparativa da equação utilizada para o comprimento de rótula plástica neste trabalho com formulações de outros autores para esta grandeza.

Nesta análise, os resultados apresentados indicam que os valores de δ são muito influenciados pela relação altura da seção/vão da estrutura, de maneira que eles tendem a ser maiores para menores valores de h/l , que representam estruturas mais esbeltas. Portanto, quanto menor a relação h/l , maior é o valor de δ .

Nos dois métodos, pode-se constatar que a VIGA 2 retornou os menores de valores de δ , concluindo-se que estruturas menos esbeltas propiciam uma redistribuição de esforços muito maior quando considerada a plastificação. Os valores de δ de ambos os métodos resultaram em valores menores do que os previstos pela Norma. Enquanto isso, vigas mais esbeltas como o caso da VIGA 1, maiores resultados de δ foram obtidos comparativamente com a VIGA 2. Desta forma, o aumento da esbeltez da viga em ambos os métodos elevou de maneira significativa os valores do coeficiente de redistribuição. Nos casos das vigas, a NBR 6118 (ABNT, 2014) é, portanto, conservadora.

A laje, elemento estrutural mais esbelto estudado neste trabalho, mostrou que a Norma somente é mais conservadora para valores de k_x superiores a 0,43 aproximadamente, em ambos os métodos. Diante disso, os valores do coeficiente de redistribuição são relativamente grandes, próximos da unidade, fato que demonstra a dificuldade em se realizar a redistribuição de esforços em lajes. Esta afirmação justifica as restrições colocadas pela Norma na aplicação do Método das Charneiras Plásticas.

Adicionalmente, os exemplos estudados demonstram que os valores de δ são muito pouco afetados pela diferença de classes de concreto. Para as três relações de h/l consideradas, as curvas de tendência δ são praticamente iguais para classes de concreto C20 e C30. Assim, nestes casos, a redistribuição de esforços da análise plástica depende da geometria da estrutura e não da classe de resistência do concreto.

A partir da comparação do comprimento de rótula plástica utilizado neste trabalho com equações propostas por diversos autores, percebe-se que a definição desta grandeza ainda é incerta, haja vista que há certa discrepância entre os valores obtidos para uma mesma estrutura. As equações obedecem a dados experimentais e não a uma formulação analítica. Porém, todas as fórmulas listadas na Tabela 9 retornam valores na mesma ordem de grandeza de 0,33 m. Desta forma, o comprimento de rótula plástica considerado neste artigo é coerente com trabalhos anteriores acerca deste tema, indicando que a capacidade de rotação plástica aqui calculada apresenta valores aceitáveis.

8 Referências

- ARBULU, A.G.B. Plastic hinge length in high-rise concrete shear walls. Thesis (Master of Applied Science) – The University of British Columbia, Vancouver, 2006.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS ABNT. NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, Rio de Janeiro, 2014.
- COMITÊ EUROPEU DE NORMALIZAÇÃO CEN. Eurocódigo 2 – Projecto de estruturas de betão – Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios, Bruxelas, 2004.
- QUEIROZ, D.F.C.S. Avaliação da capacidade de rotação plástica em lajes e vigas de concreto armado. Projeto de Graduação, Departamento de Estruturas, Escola Politécnica da UFRJ, Rio de Janeiro, 2019.
- SOUZA JR, P.J. Análise de pórticos de concreto armado em condições sísmicas considerando o modelo de Mander. Dissertação (Mestrado em Projeto de Estruturas) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica da UFRJ, Rio de Janeiro, 2012.
- XU, L.; PAN, J.; LU, C.; YIN, W. Development mechanism of plastic hinge in reinforced engineered cementitious composite beams under monotonic loading. *Structural Concrete*, v.20, p. 252-266. 2019.
- ZHAO, X.; WU, Y.; LEUNG, A.Y.; LAM, H.F. Plastic Hinge Length in Reinforced Concrete Flexural Members. *Procedia Engineering*, v.14, p. 1266-1274. 2011.