

## **Análise Não-Linear Física de Pórticos Planos em Concreto Armado com Redução da Rigidez pelo Método Aproximado Normativo e Método Iterativo com Diagrama Momento-Curvatura.**

**Bárbara Cardoso Gomes<sup>1</sup>, Luiz Fernando Martha<sup>2</sup>, Sergio Hampshire C. Santos<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Universidade do Estado do Rio de Janeiro/ [barbara.cardoso@poli.ufrj.br](mailto:barbara.cardoso@poli.ufrj.br)

<sup>2</sup>Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro / [lfm@tecgraf.puc-rio.br](mailto:lfm@tecgraf.puc-rio.br)

<sup>3</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro / [sergiohampshire@poli.ufrj.br](mailto:sergiohampshire@poli.ufrj.br)

### **Resumo**

A partir de uma ferramenta gráfico-iterativa desenvolvida com a finalidade de considerar a perda de rigidez das seções em concreto armado, faz-se aqui um comparativo com o método que considera a rigidez secante pelo diagrama de momento-curvatura e o método aproximado recomendado pela norma brasileira. A partir de um pré-dimensionamento linear com a definição das seções, o programa calcula a rigidez secante destas dentro de um vão com espaçamento definido pelo usuário. Insere-se a nova rigidez e faz-se uma nova análise e um novo dimensionamento, até que o processo convirja para uma configuração final de seção. No entanto a norma brasileira recomenda que se aplique um coeficiente de redução na rigidez de 0,8 em pilares e 0,4 ou 0,5 em vigas a depender se as armaduras superior e inferior são distintas ou iguais, respectivamente. Nos exemplos aplicados, observou-se que para todos os casos em que o momento atuante é inferior ao momento de fissuração da peça, o valor da redução pelos dois métodos se aproxima, entretanto, para valores superiores de momento as reduções são consideravelmente maiores. O principal impacto da redução da rigidez se dá nos deslocamentos, tendo maior efeito que no dimensionamento da armadura. O chamado fator de amplificação do deslocamento nos exemplos se aproxima de 3, gerando uma grande influência nos efeitos de segunda ordem.

### **Palavras-chave**

Concreto Armado; Análise Não Linear; Momento-curvatura; Método Iterativo.

### **Introdução**

A partir da fissuração do concreto nos elementos estruturais, é importante avaliar a necessidade de se considerar a perda de rigidez das seções. A norma brasileira recomenda que se considere de maneira aproximada a não linearidade física do material na análise de estruturas de nós fixos, especificando os coeficientes de redução em 0,8 para pilares e 0,4 e 0,5 para vigas com armaduras superior e inferior distintas ou iguais, respectivamente. No primeiro trabalho de GOMES (2017) a não linearidade do concreto foi considerada a partir do diagrama de momento curvatura, em que se analisou um edifício próximo da realidade com carregamentos reais. Com o dimensionamento das seções e definição das armaduras, reduziu-se a rigidez a partir dos momentos atuantes na estrutura. Observa-se que se considerou apenas a redução em pilares com o pior cenário de conjunto momento-normal atuantes por trecho, sendo uma análise pouco discretizada. Nestas condições, observou-se que a redução em pilares se aproximava de 0,3, sendo um valor inferior ao recomendado de 0,8. Dadas as limitações e aproximações desta análise, propôs-se o desenvolvimento de uma ferramenta capaz de fazer a análise com um maior refinamento.

O FTOOL (2015) vem sendo aprimorado para que seja uma ferramenta não só de análise estrutural, como também de dimensionamento. NISKIER (2004) contribuiu com o dimensionamento de vigas em concreto armado, seguida de SILVA (2017) que acrescentou o dimensionamento de pilares e a análise não linear geométrica. Como resultado deste trabalho, GOMES (2019) adiciona a análise não linear física a partir da análise da estrutura com inércias variáveis nas seções de concreto. A redução na rigidez passa a ser discretizada conforme escolha do usuário com mesmo método anteriormente utilizado com o diagrama momento-curvatura, no entanto o processo passa a ser iterativo com o dimensionamento das seções e alteração da rigidez a cada iteração. Considerando que o dimensionamento das seções gera a decalagem da armadura, bem como

os esforços atuantes variam, a variação da rigidez da seção ao longo do vão é considerada com a analogia da viga conjugada, método descrito por GOMES (2018) para ser aplicado no FTOOL (2015). O método é proposto por VILELA (2008) que a partir da analogia das vigas conjugadas (Processo de Mohr) resulta em integrais que podem ser resolvidas numericamente por integração de Gauss.

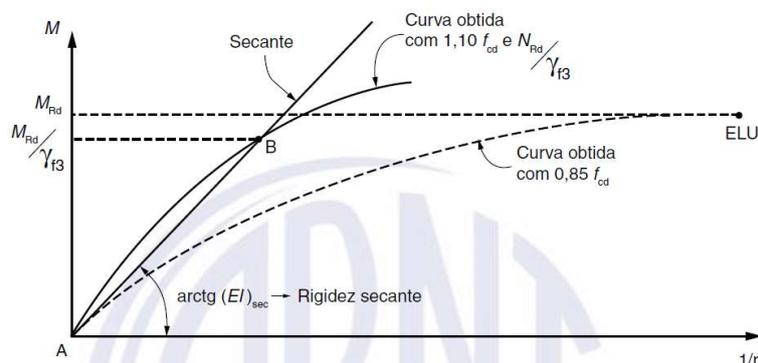
Neste trabalho descreve-se o processo iterativo para a obtenção das rigidezes das seções e faz-se a aplicação em alguns exemplos para avaliação da redução da rigidez pelo método normativo aproximado e o proposto.

### Relação Momento-Curvatura

Para os casos em que a análise linear não apresenta resultados aceitáveis dadas as suas aproximações, é necessária a análise não linear para uma melhor representação do comportamento da estrutura e posterior dimensionamento. A não linearidade pode estar associada ao comportamento do material, sendo nomeada não-linearidade física, ou aos esforços causados pela deformação da estrutura, sendo nomeada não-linearidade geométrica. A norma brasileira (ABNT, 2014) possui aproximações para ambos os casos. A exemplo do concreto que sua relação tensão-deformação é representada por uma parábola-retângulo, entretanto, para fins de dimensionamento esta relação é aproximada para um retângulo com tensão constante. Já a análise não-linear geométrica, pode ser considerada de maneira simplificada a partir do método P-Delta em que se substitui uma análise não linear por várias análises lineares a partir dos momentos gerados pelas forças verticais atuantes nos nós da estrutura. Com o principal foco deste trabalho na não-linearidade física do concreto, considera-se a perda da rigidez da seção a partir da fissuração que é representada a partir de um fator multiplicador de redução.

A norma brasileira define que “o principal efeito da não linearidade física pode em geral, ser considerado através da construção da relação momento-curvatura para cada seção, com armadura suposta conhecida, e para o valor da força normal atuante” (ABNT, 2014). A relação é mostrada na Figura 1, que é obtida considerando a força resistente normal última  $N_{Rd}$  e o coeficiente de ponderação das ações  $\gamma_{f3}$  definido por 1,1. A curva AB mostrada na Figura 1 é aproximada para uma reta, que caracteriza a rigidez secante  $(EI)_{sec}$  da seção, que é portanto calculada conforme a equação (1).

$$(EI)_{sec} [kN.m^2] = \frac{M_d [kN.m]}{1/r [1/m]} \quad (1)$$



**Figura 1 – Relação momento-curvatura – Extraída de ABNT (2014).**

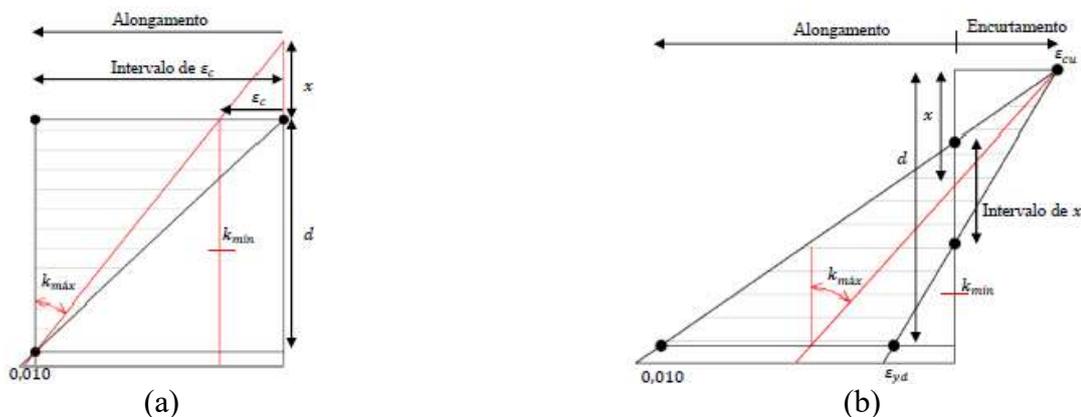
Para a elaboração do diagrama momento-curvatura, algumas hipóteses são admitidas:

- As seções permanecem planas após a deformação. Logo, é possível fazer a relação da curvatura com as deformações da seção, sendo aquela o gradiente destas;
- Considera-se a aderência entre as barras de aço e o concreto, não havendo deslizamento na região de contato entre os materiais;
- Considera-se que a força normal e o momento fletor atuantes são aplicados no centroide da seção;

- Despreza-se completamente a resistência do concreto à tração, logo, todo o esforço de tração é resistido pelas armaduras.

### Analogia dos Domínios

Para a construção do diagrama é necessário que se encontre o par de linha neutra e curvatura para o equilíbrio da uma determinada seção dadas suas características e os carregamentos normal e momento fletor. Seja o processo numérico, são construídos dois *loops*, o primeiro que varia o valor da linha neutra e o segundo o da curvatura. Com estes valores calcula-se o momento resistente da seção, que caso seja próximo do valor atuante, dada uma tolerância, dá-se por convergida a seção e calcula-se a rigidez secante. Caso contrário, faz-se a próxima iteração de linha neutra e assim sucessivamente. Para impedir que a seção assuma uma configuração de ruína de algum dos materiais, as variações de linha neutra e curvatura ocorrem dentro dos limites dos domínios conforme a NBR 6118 (ABNT, 2014). A busca do par linha neutra-curvatura começa supondo que a linha neutra está acima da seção, em seguida dentro e por fim abaixo. Desta forma, pode-se fazer essa variação na sequência dos domínios 1, 2, 3, 4 e 5. Observa-se que nos domínios 1 e 5 a linha neutra varia do infinito negativo até zero e da altura da seção até o infinito positivo, respectivamente. Não sendo possível variar numericamente a linha neutra do infinito, para estes domínios define-se o primeiro *loop* com a variação da deformação no concreto. A Figura 2(a) exemplifica graficamente o intervalo da deformação no concreto e curvatura para o domínio 1, a Figura 2(b) o intervalo da linha neutra e da curvatura do domínio 3.



**Figura 2 – Diagrama de deformações (a) Analogia ao domínio 1 (b) Analogia ao domínio 3 – Extraída de GOMES (2019).**

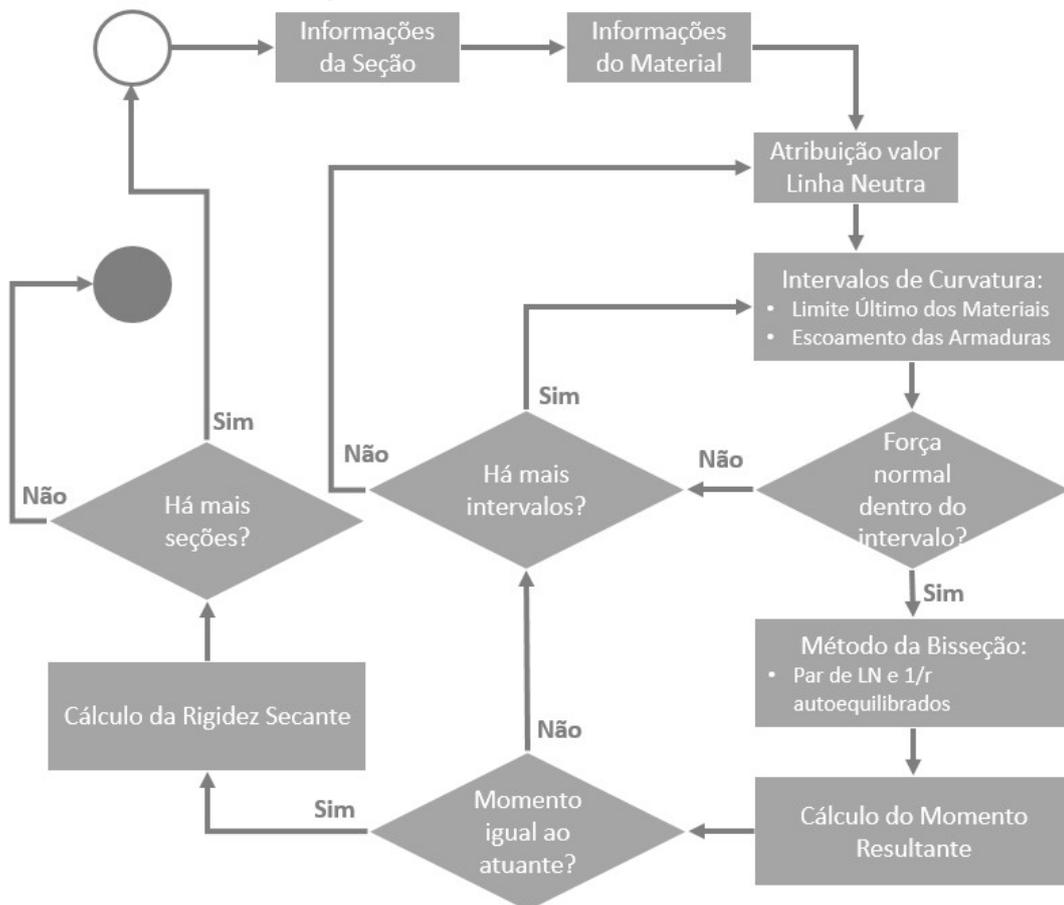
Para o equilíbrio da seção, deve-se calcular a normal a partir da configuração da seção e posteriormente o momento, até que se encontre os valores dos esforços atuantes. Conhecendo os valores limites das variáveis, opta-se pelo método da bisseção para encontrar a curvatura correspondente da seção de equilíbrio. Observa-se que a curva de normal pela curvatura não é contínua, dado que as armaduras escoam conforme aumenta-se a curvatura da seção, desta forma é necessário se fazer subintervalos dentro do *loop* da curvatura. SILVA (2017) em seu projeto de graduação utilizou o método de Newton-Raphson para tal convergência, no entanto, conforme as seções se tornam mais complexas, a descontinuidade da curva impede seu uso que leva a falsos resultados, dado que a seção pode resultar numa mesma força normal resistente com valores distintos de curvatura, conforme observado em GOMES (2019). Portanto, opta-se pela subdivisão dos intervalos e cria-se a curvatura intermediária para os valores em que as armaduras escoam. A Tabela 1 traz os valores utilizados em todos os intervalos de *loop* para os domínios, bem como o cálculo das curvaturas intermediárias.



**Tabela 1 – Hipóteses da analogia dos domínios com intervalos de deformação no concreto, linha neutra e curvatura.**

	Primeiro Loop		Segundo Loop		
	$\varepsilon_{c,min}$	$\varepsilon_{c,máx}$	$k_{min}$	$k_{máx}$	$k_{inter}$
Domínio 1	0.0	0.010	0.0	$\frac{0.010 - \varepsilon_c}{d}$	
Domínio 5	$-\varepsilon_{cu}$	0.0	Se $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$ ,		$\frac{\varepsilon_{s1} - \varepsilon_c}{d_i}$
			$\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}} \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{h}$	$\frac{\varepsilon_c}{h}$	
			0.0		
	$x_{min}$	$x_{máx}$	$k_{min}$	$k_{máx}$	$k_{inter}$
Domínio 2	0.0	$\frac{\varepsilon_{cu} \cdot d}{\varepsilon_{s2} + \varepsilon_{cu}}$	0.0	$\frac{\varepsilon_{s2}}{d_i - x}$	
Domínio 3	$\frac{\varepsilon_{cu} \cdot d}{\varepsilon_{s2} + \varepsilon_{cu}}$	$\frac{\varepsilon_{cu} \cdot d}{\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}}$	0.0	$\frac{\varepsilon_{cu}}{x}$	$\frac{\varepsilon_{s1}}{d_i - x}$
Domínio 4	$\frac{\varepsilon_{cu} \cdot d}{\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}}$	$h$	0.0	$\frac{\varepsilon_{cu}}{x}$	

A Figura 3 traz o fluxograma que o programa utiliza para a definição da seção auto-equilibrada, verificação com os esforços atuantes e cálculo da rigidez secante da seção.



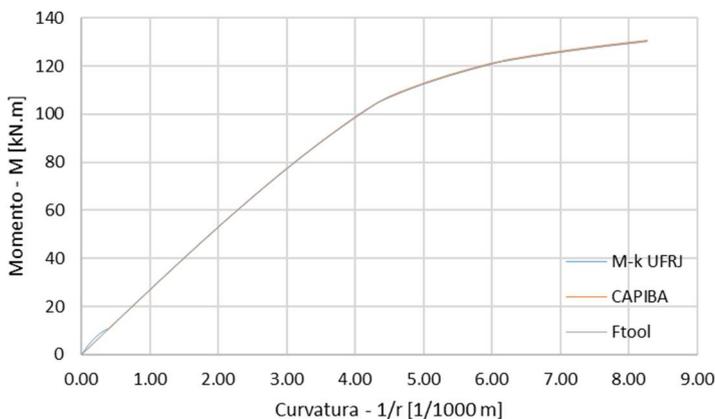
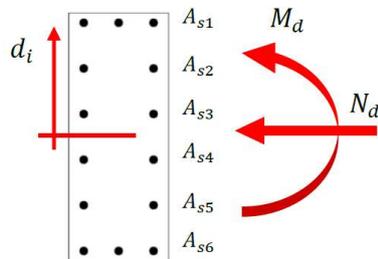
**Figura 3 – Fluxograma para obtenção da rigidez secante.**

### Validação da Obtenção dos Diagramas Momento-Curvatura

Dois programas foram previamente desenvolvidos na UFRJ para construção do diagrama momento curvatura, aqui faz-se a validação do método deste trabalho a partir dos anteriores. Os programas M-k UFRJ (Castro, 2011) e Capiba (Souza Júnior, 2012) possuem uma interface para inserção das características da seção e fornecem o diagrama em arquivos de texto e planilha, respectivamente. A Tabela 2 traz uma seção adotada como exemplo para construção dos diagramas nas três ferramentas, que são mostrados na Figura 4. Observa-se que as curvas se sobrepõem e os valores de momento máximo e curvatura limite são numericamente iguais, tendo uma variação desprezível.

**Tabela 2 – Características da seção de exemplo.**

Concreto	$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$	$\gamma_c = 1,4$
Aço	$f_y = 500 \text{ MPa}$	$\gamma_s = 1,15$
Seção	20x50 cm	
Normal	-1500 kN	
Armadura	$d_i$	$A_{si}$
$A_{s1}$	23,0 cm	3Ø10 mm
$A_{s2}$	13,8 cm	2Ø10 mm
$A_{s3}$	4,6 cm	2Ø10 mm
$A_{s4}$	-4,6 cm	2Ø10 mm
$A_{s5}$	-13,8 cm	2Ø10 mm
$A_{s6}$	-23,0 cm	3Ø10 mm

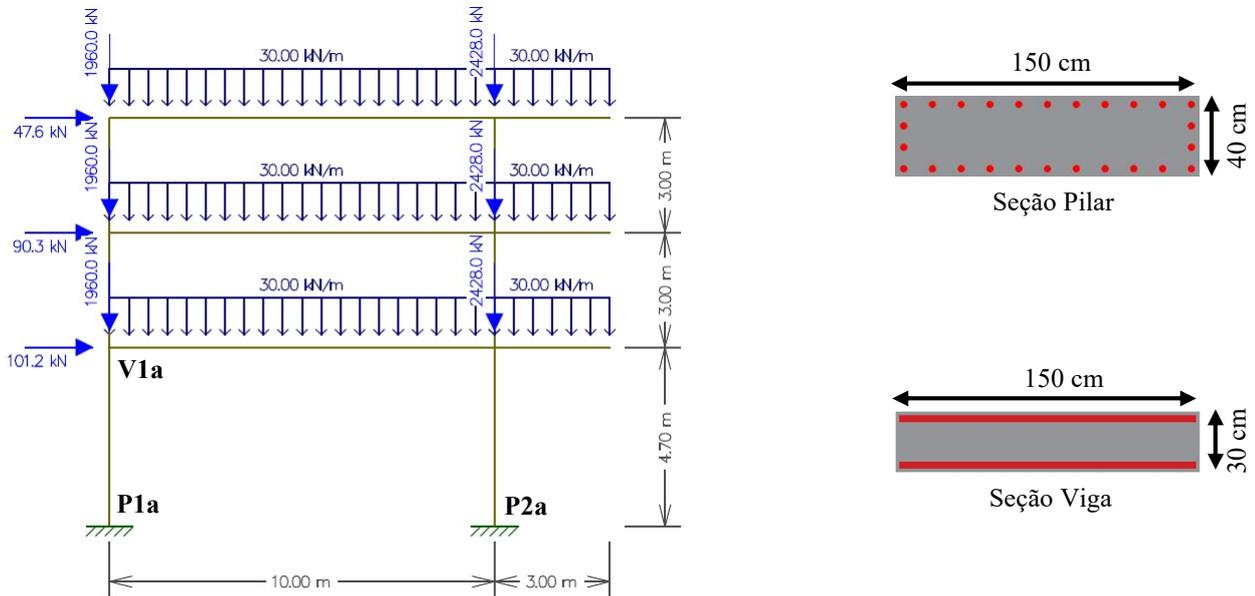


	Momento Máximo $M_{m\acute{a}x}$ [kN.m]	Curvatura limite $k_{lim}$ [1/1000 m <sup>-1</sup> ]
FTOOL	130,409	8,263
M-k UFRJ	130,420	8,268
Capiba	130,469	8,269

**Figura 4 – Diagramas momento-curvatura gerados pelos três programas.**

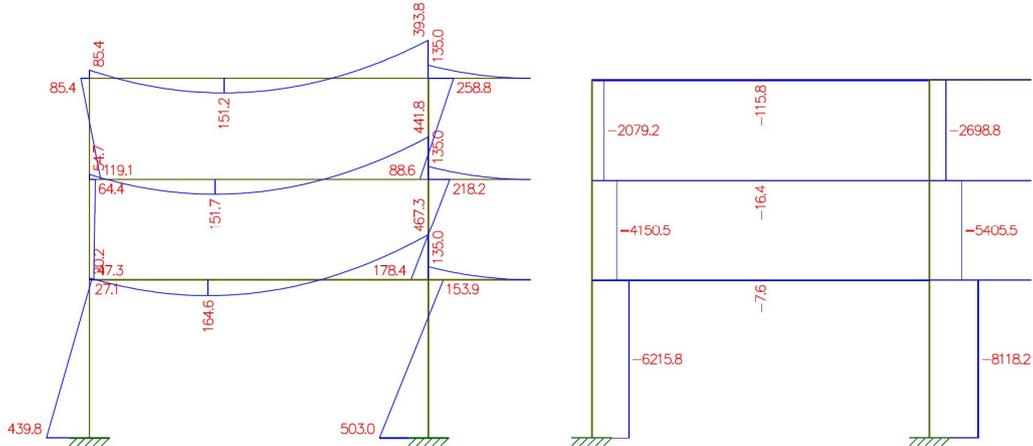
### Aplicação da Ferramenta

Considera-se o pórtico mostrado na Figura 5 com três andares e carregamento conforme a figura. Os pilares têm seção de 40x150 cm com altura útil de 37 cm e cobrimento de 2,5 cm, as vigas com seção de 30x150 cm, altura útil de 27 cm e cobrimento de 2 cm. Opta-se pela armação do pilar com quatro camadas de armadura, sendo onze barras nas camadas superior e inferior e duas nas intermediárias. A viga tem armadura de 16 mm com decalagem de duas em duas barras. Adota-se o concreto C30 e aço CA-50. Destaca-se o trecho do pilar P2a e o trecho de viga V1a que serão analisadas as suas reduções.

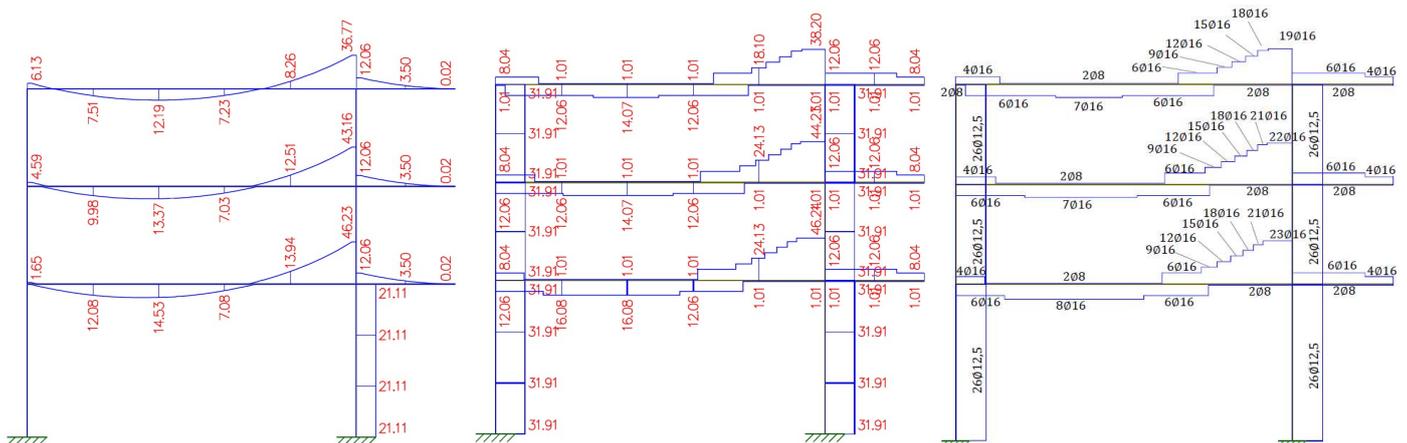


**Figura 5 – Pórtico plano em concreto armado considerado para exemplo.**

O programa faz uma análise linear inicial e determina os esforços para dimensionamento das seções, que são mostrados na Figura 6 os diagramas de momento fletor e normal. A seguir faz-se o dimensionamento das seções, a Figura 7 mostra as armaduras calculada e adotada de acordo com os dados fornecidos.



**Figura 6 – Diagrama de momento fletor e normal da análise linear inicial.**



**Figura 7 – Diagramas de armaduras calculada e adotada [cm<sup>2</sup>].**

## Redução da Rigidez

A partir das seções conhecidas, pode-se fazer a análise não linear com a redução da rigidez a partir do momento-curvatura conforme descrito anteriormente. A discretização da redução da rigidez é dada pelo usuário, aqui faz-se o exemplo com intervalo de 0,0m, 0,2m e 0,5m. Com o passo em zero, o programa calcula a rigidez apenas nos nós em que há alteração da seção. Desta forma, em pilares só há a redução para os valores nas extremidades do trecho, já nas vigas há conforme a alteração da armadura da seção. A Figura 8(a) mostra a redução no pilar com passo 0,0 enquanto a Figura 8(b) com o passo 0,2. Observa-se que há variação na redução da rigidez ao longo do trecho, no entanto com valores próximos, o que se deve ao momento fletor atuante estar em um trecho com inclinação quase constante no diagrama momento-curvatura mostrado na Figura 8(c). Para a viga V2a, na Figura 9 é possível ver que há grandes variações na redução da rigidez dentro do vão, o que se deve ao escalonamento das armaduras. No entanto, no caso da viga ao considerar o passo as reduções são similares para ambos os passos. As reduções iniciais apresentadas nas figuras 8 e 9 já são maiores que as fornecidas pela norma brasileira, que para o pilar seria um fator de 0,8 e para as vigas de 0,4.

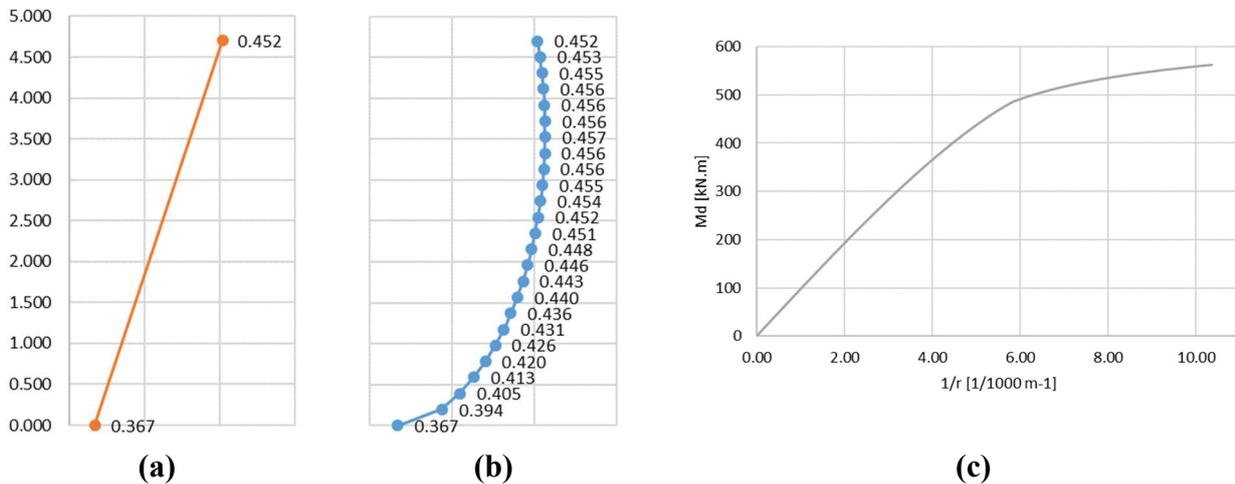


Figura 8 – Reduções na rigidez do pilar P2a (a) Passo 0,0 m (b) Passo 0,2 m (c) Diagrama momento curvatura do pilar P2a com normal -8118,2 kN.

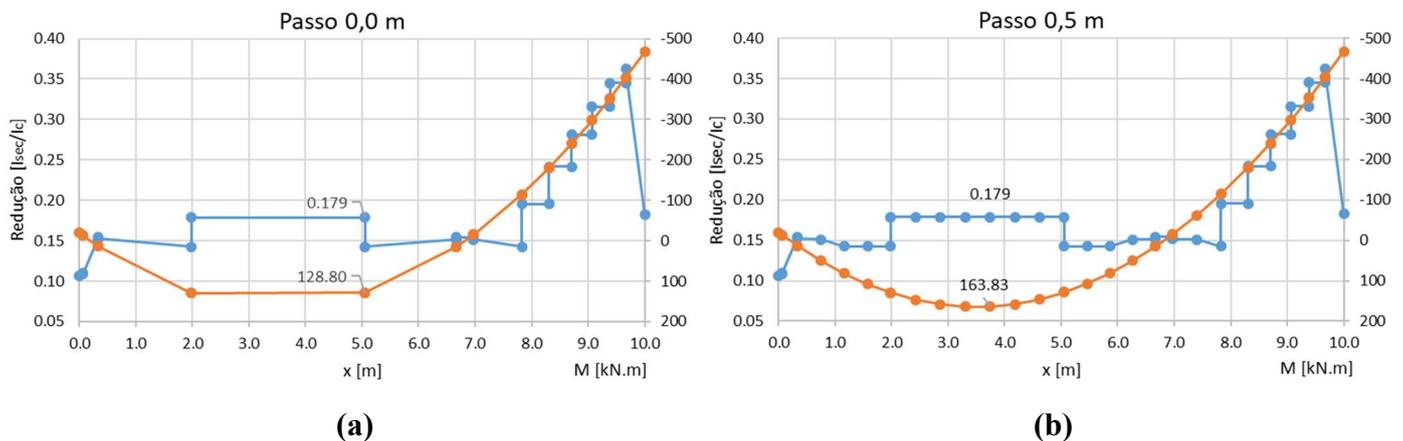
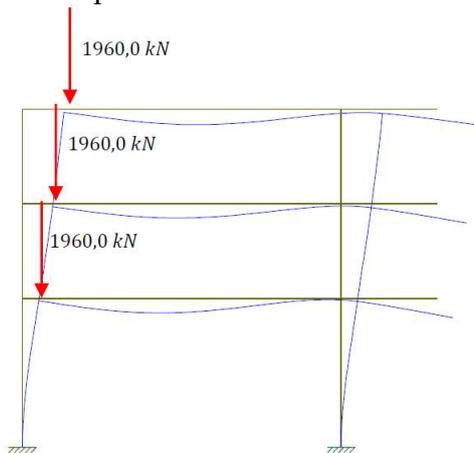


Figura 9 - Reduções na rigidez da viga V1a (a) Passo 0,0 m (b) Passo 0,5 m.

Seja o processo de convergência da estrutura iterativo, é necessário que se faça a redistribuição dos esforços com os novos valores de rigidez nas seções. Para a estrutura com passo de 0,2, 0,5 e 1,0 foram necessárias 10, 12 e 22 iterações, respectivamente. A convergência da estrutura é definida pelo diagrama de momento fletor, quando este não apresenta mais variações conforme faz-se novas iterações. A Figura 10 traz os diagramas finais da estrutura com passo 0,5.



Para simular os efeitos de segunda ordem, faz-se uma iteração inicial do método P-Delta, considerando apenas os carregamentos pontuais verticais nos nós 1, 2 e 3. Desta forma, obtém-se um momento adicional e as forças fictícias que seriam aplicadas em cada andar para simulação do efeito de segunda ordem. O braço de alavanca ( $\Delta\delta$ ) é calculado pela diferença de deslocamento entre os nós, que gera o momento ( $M$ ) dado pela multiplicação do deslocamento diferencial pela força pontual ( $N$ ). A força horizontal fictícia ( $H$ ) aplicada seria dada pela divisão do momento pela altura do trecho ( $h$ ). A Figura 12 mostra o método P-Delta e traz os valores calculados para cada trecho.



	$\delta$ [mm]	$\Delta\delta$ [mm]	$h$ [m]	$N$ [kN]	$M$ [kN.m]	$H$ [kN]
Nó 1	114.5	35.6	3.00	1960.0	69.83	23.28
Nó 2	78.9	38.3	3.00	1960.0	74.97	24.99
Nó 3	40.6	40.6	4.70	1960.0	79.62	16.94

**Figura 12 – Simulação do efeito P-Delta na estrutura.**

Observa-se que o pilar P1c teria um acréscimo de 79,62 kN.m no momento de cálculo, que comparado com o valor da análise linear de 439.8 kN.m representa 18% deste valor. Assim, os efeitos de segunda ordem são superiores a 10%, o que classifica a estrutura como nós móveis e obriga que se considerem os efeitos globais e locais de segunda ordem.

### Conclusões

O principal objetivo do trabalho é incorporar a análise não linear no programa, o que se cumpre a partir do método numérico iterativo proposto. Observou-se que no caso das vigas, o passo adotado para discretização não apresenta grande impacto, já que há uma variação da seção de acordo com o escalonamento das armaduras. Já em pilares há um maior impacto já que a seção é constante ao longo dos trechos.

Em comparação com a recomendação da NBR 6118 (ABNT, 2014) para a consideração aproximada da não linearidade física, que define os valores para redução da rigidez bruta da seção. Para pilares recomenda-se o valor de 0,8, para vigas a recomendação é de 0,4 para vigas com armadura superior e inferior distintas e 0,5 quando forem iguais. Conforme o exemplo apresentado neste trabalho, as reduções encontradas são maiores que o sugerido. A exemplo da viga V1a que no trecho de momento máximo positivo tem uma redução com fator de 0,179, já o pilar P2a apresenta uma redução com fator na ordem de 0,4. Os resultados encontrados neste trabalho se aproximam do resultado apresentado por GOMES (2017), que para pilares o fator de redução encontrado foi de 0,3.

Observa-se que os principais impactos se dão no deslocamento, que influenciam diretamente nos efeitos de segunda ordem e consequentemente no dimensionamento. O denominado fator de amplificação do pórtico se aproxima de 3,0, que no trabalho anterior se aproximou de 2,4.

Para uma melhor avaliação do impacto, é necessário ainda que se incorpore a análise de segunda ordem ao efeito da redução de rigidez, bem como a análise em estruturas em três dimensões que se aproximam mais da realidade.



## Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- CASTRO, F. M. O., M-k UFRJ Análise não linear física de seções de concreto armado versão 3.0, Julho de 2011.
- FTOOL, Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas, Versão Educacional 3.01, agosto de 2015, disponível em <http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool>.
- GOMES, B. C., Estudo dos fatores de redução de rigidez da NBR 6118:2014 para análise aproximada da não linearidade física. Projeto de Graduação – Escola Politécnica da UFRJ, 2017.
- GOMES, B. C., Ferramenta Gráfico-Interativa para Análise Não Linear Física de Pórticos Planos de Concreto Armado Considerando o Diagrama Momento-Curvatura. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, fevereiro de 2019.
- GOMES, B. C., MARTHA, L. F., SANTOS, S. H. C., MIRANDA, F., Ferramenta Gráfico-Interativa para o Dimensionamento em Regime de Serviço de Pórticos Planos de Concreto Armado Considerando a Redução da Rigidez por Fissuração. 60º Congresso Brasileiro do Concreto, Foz do Iguaçu, 2018.
- NISKIER, C. M., Ferramenta gráfico-interativa para o projeto de vigas e edifícios em concreto armado. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, setembro de 2004.
- SILVA, F. M., Análise variacional de segunda ordem não linear em pilares de concreto armado com uso de relação momento-curvatura analiticamente ajustada. Projeto de Graduação – Escola Politécnica da UFRJ, fevereiro de 2017.
- SILVA, M. F. D. S., Ferramenta gráfico-interativa para o dimensionamento de pórticos planos de concreto armado considerando não linearidade geométrica. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, abril de 2017.
- SOUZA JÚNIOR, P. J., Análise de pórticos de concreto armado em condições sísmicas considerando o modelo de Mander. Dissertação de Mestrado. Programa de Projeto de Estruturas (PPE), Escola Politécnica da UFRJ, 2012.
- VILELA, P. de C. S.. Soluções fundamentais para barras em mísula pela analogia da viga conjugada. XXIX CILAMCE, Maceió, 2008.