



XII CONGRESSO BRASILEIRO  
de PONTES e ESTRUTURAS  
7 a 11 de junho de 2021 - Congresso Virtual

## **Análise de Modelos de Cálculo de Pontes com Múltiplas Vigas**

**Luís Gabriel de Moura<sup>1</sup>, Christian Donin<sup>2</sup>, Daniele Martins<sup>3</sup>, Eduardo Rizzatti<sup>4</sup>, Isadora Paczek<sup>5</sup>,  
Leonardo Azevedo Massulo<sup>6</sup>, Lidiane Kist<sup>7</sup>**

<sup>1</sup> Engenheiro Civil / Universidade de Santa Cruz do Sul / engluisgabriel@outlook.com

<sup>2</sup> Professor Doutor, Universidade de Santa Cruz do Sul / Ingaugue Engineering and Technology / donin.eng@gmail.com

<sup>3</sup> Mestranda / Universidade Federal de Santa Maria / engcivildanielemartins@gmail.com

<sup>4</sup> Professor Doutor, Departamento de Estruturas e Construção Civil – Universidade Federal de Santa Maria /  
edu\_rizzatti@yahoo.com.br

<sup>5</sup> Mestranda / Universidade Federal de Santa Maria / PPGEC / engisadorapaczek@gmail.com

<sup>6</sup> Professor Engenheiro Civil / Departamento de Estruturas e Construção Civil – Universidade Federal de Santa Maria / Mestrando

<sup>7</sup> Mestranda / Universidade Federal de Santa Maria / PPGEC / lidianekist@gmail.com

### **Resumo**

O trabalho descreve alguns métodos para a distribuição de ações nas pontes rodoviárias dotadas de múltiplas vigas. Escolheu-se modelos estruturais de pontes com duas longarinas e em múltiplas longarinas, sendo aplicados o método de Engesser-Courbon com rigidez real na transversina, Engesser-Courbon com rigidez infinita na transversina, que se tratam de análises bidimensionais e o Método dos Elementos Finitos de análise tridimensional, a fim de que os mesmos fossem comparados. Os principais resultados são os de trem-tipo simplificado, momento fletor positivo e área de aço resultante do dimensionamento à flexão das seções em concreto armado destas longarinas, sendo que os valores se mantiveram próximos em todos os resultados. Nos resultados obtidos o método de Engesser-Courbon com a rigidez real da transversina que faz uma simplificação, mostrou-se mais preciso, pois seus resultados mantiveram-se superiores. Observou-se que o Método dos Elementos Finitos tem uma maior precisão, pois a estrutura é modelada tridimensionalmente, fazendo com que longarinas, transversinas, tabuleiro trabalhem juntos e ainda com seus parâmetros dos materiais.

**Palavras-chave:** Pontes; Análise de estruturas; Métodos de distribuição.

### **1 Introdução**

A estrutura de uma ponte possui particularidades em seu dimensionamento, uma delas é as ações em que a estrutura fica submetida. O trabalho descreve alguns métodos para a distribuição de diferentes ações nas pontes rodoviárias dotadas de múltiplas vigas. Escolheu-se para análise, dois modelos estruturais de pontes, sendo um de uma ponte com duas longarinas e o outro de uma ponte com quatro longarinas, para os quais foram aplicados o método de Engesser-Courbon com rigidez real na transversina, Engesser-Courbon com rigidez infinita na transversina que se tratam de análises bidimensionais e o Método dos Elementos Finitos de análise tridimensional, a fim de que os mesmos fossem comparados. Na definição dos modelos de pontes empregados foram observadas as prescrições da NBR 7188:2013, assim como da NBR 6118:2014.

### **2 Métodos de Cálculo**

#### **2.1 Métodos de Cálculo para Pontes com Múltiplas Vigas**

A distribuição transversal das cargas em estruturas é dependente da eficiência da ligação transversal entre os elementos de suporte principal. A estrutura sujeita a cargas concentradas, originadas pelos veículos correntes, é bem mais econômica quanto maior for a sua capacidade de repartição transversal, assim sendo qualquer carga num ponto indiferenciado da estrutura é suportada não apenas pelo elemento principal, sendo

também com o auxílio dos elementos adjacentes, (CARRIL E LOPES, (19--?).

### 2.1.1 Método Engesser-Courbon

O método de Courbon desconsidera a torção nas vigas. São considerados além da Teoria das Estruturas básica, as seguintes hipóteses: as longarinas são paralelas, interligadas perpendicularmente por transversinas e contém inércia constante; as transversinas estão somente apoiadas nas longarinas e considerando que estas apresentam rigidez infinita à flexão, com desprezo a suas deformações comparadas com as deformações das longarinas; o efeito da torção é desconsiderado. Desta forma, as transversinas se comportam como barra rígidas, continuando com seus eixos retilíneos depois da deformação do conjunto, (ALVEZ, ALMEIRA E JUDICE, 2004).

### 2.1.2 Método dos elementos finitos

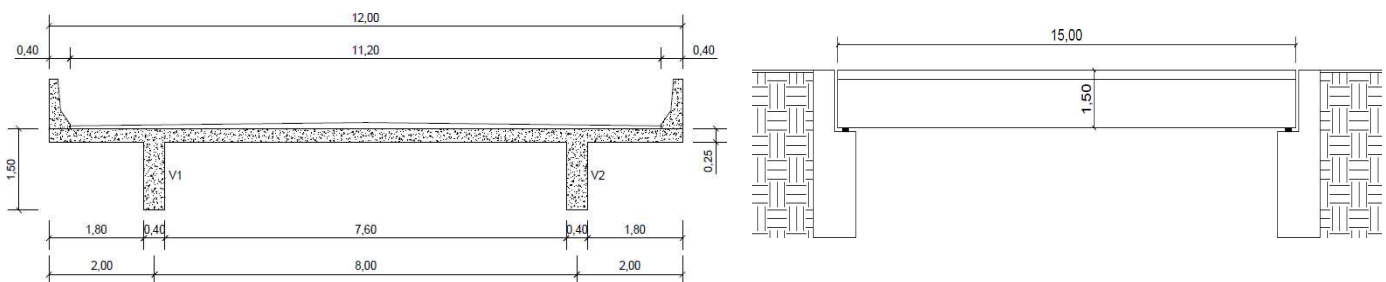
O Método dos Elementos Finitos, prevê a divisão do domínio de integração, contínuo, em um número finito de pequenas regiões denominadas elementos finitos, tornando o meio contínuo em discreto. Esta divisão do domínio recebe o nome de rede de elementos finitos. O tamanho dos elementos finitos podem ser variados, aumentando ou diminuindo a malha desse reticulado. Os pontos de intersecção das linhas dessa rede chamam-se de nós, (ASSAN, 1999).

## 3 Metodologia

Este trabalho compara os resultados de diferentes composições de trem-tipo simplificado, momento maior atuante na estrutura e a área de aço de uma ponte rodoviária TB – 450, adotando no mesmo modelo de ponte, o método com a estrutura de duas longarinas e a estrutura com múltiplas longarinas, comparando os resultados de trem-tipo de flexão, momento fletor máximo e área de aço.

### 3.1 Ponte com duas longarinas

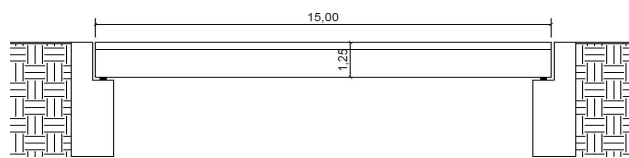
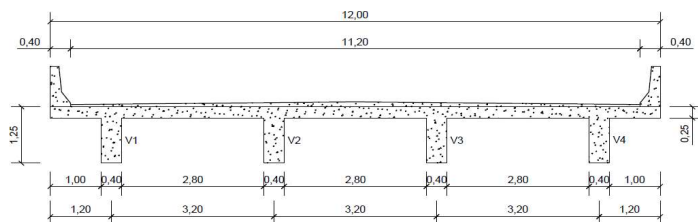
O modelo utilizado foi uma ponte TB – 450 construída por 2 vigas longarinas principais, sendo elas unidas por 3 vigas transversinas. As longarinas possuem um vão de 15 m, seção transversal 0,40 x 1,50 m. Já as transversinas possuem seção transversal de 0,30 x 1,00 m. Utilizou-se concreto C40,  $f_{ck} = 40$  MPa, de módulo de elasticidade  $E_{ci} = 42.501,00$  MPa, este definido conforme NBR 6118:2014. A seguir, conforme figura 1 e 2, o esquema transversal e longitudinal da estrutura da ponte em análise (medidas em m).



**Figura 1 – Esquema transversal da ponte TB – 450** **Figura 2 – Esquema longitudinal da ponte TB – 450**

### 3.2 Ponte com quatro longarinas

O modelo utilizado foi uma ponte TB – 450 construída por 4 vigas longarinas principais, sendo elas unidas por 3 vigas transversinas. As longarinas possuem um vão de 15 m, seção transversal 0,40 x 1,25 m. Já as transversinas possuem seção transversal de 0,30 x 1,00 m. Utilizou-se concreto C40,  $f_{ck} = 40$  MPa, de módulo de elasticidade  $E_{cs} = 42.501,00$  MPa, este definido conforme NBR 6118:2014. A seguir, diante das figuras 3 e 4, será representado o esquema transversal e longitudinal da estrutura da ponte em análise (medidas em m).



**Figura 3 – Esquema transversal de ponte TB – 450, com 4 longarinas**

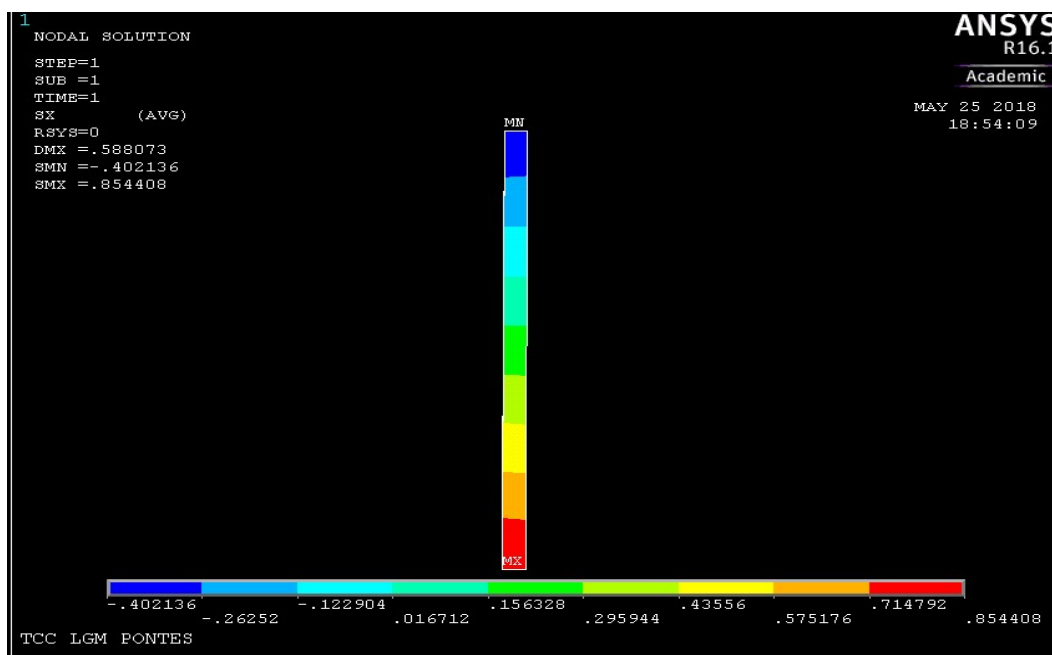
**Figura 4 – Esquema longitudinal de ponte TB – 450 com 4 longarinas**

## 4 Resultados

Na ponte com duas longarinas, a estrutura é simétrica, sendo que a V1 é igual a V2. Na ponte com quatro longarinas cada longarina possui seu próprio trem-tipo de flexão, como a estrutura da ponte é simétrica, a longarina V1 é igual a V4, assim como a V2 é igual a V3.

### 4.1 Resultados obtidos utilizando o método dos Elementos Finitos, longarina 1 (V1)

Em seguida, nas figuras 5, encontra-se as deformações da ponte, com os carregamentos aplicados voltados para a obtenção dos valores para a longarina 1.



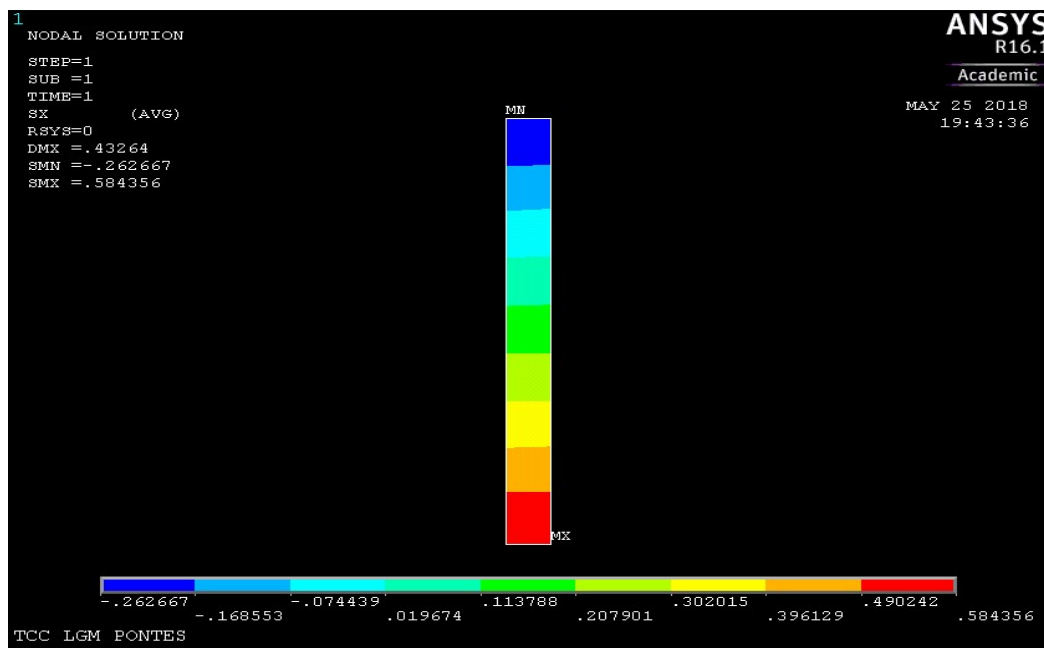
**Figura 5 – Visualizações das tensões da parte inferior do tabuleiro, longarina 1**

Os valores das tensões máximas e mínimas em  $\text{KN}/\text{cm}^2$ , em relação ao eixo x em cada nó da seção em análise: -0,40214; -0,31478; -0,23117; -0,13079; -0,030529; 0,071514; 0,17427; 0,27567; 0,37837; 0,48205; 0,58430; 0,68044; 0,77679; 0,85441.

## 4.2 Resultados obtidos utilizando o método dos Elementos Finitos, longarina 2 (V2)

Em seguida, como demonstra a figura 6, encontra-se as deformações da ponte, com os carregamentos aplicados voltados para a obtenção dos valores para a longarina 2.

**Figura 6 – Visualizações das tensões da parte inferior do tabuleiro, longarina**



A seguir encontra-se os valores exatos das tensões máximas e mínimas em KN/cm<sup>2</sup>, em relação ao eixo x em cada nó da seção em análise: -0,26267; -0,21417; -0,14922 ; -0,078024 ; -0,007875 ; 0,060258 ; 0,12774 ; 0,19654 ; 0,26580 ; 0,33323 ; 0,40439 ; 0,47261 ; 0,53279 ; 0,57706.

## 4.3 Resultados obtidos para o projeto de ponte com duas longarinas

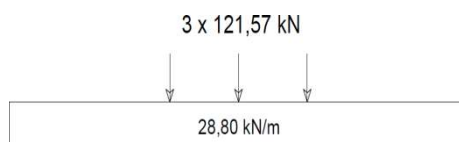
Os resultados obtidos para trem-tipo, momento máximo e área de aço para a longarina 1, sendo que a ponte é simétrica, os mesmos resultados se replicam para a longarina 2, conforme tabelas 1 e 2 e figura 7.

**Tabela 1 – Valor do trem-tipo**

Longarina	RP (kN)	RP1 (kN/m)	RP2 (kN/m)	RP' (kN)	RP1 + PR2 (kN/m)
V1 = V2	151,95	13,61	15,19	121,57	28,80

**Tabela 2 - Momento máximo e área de aço para duas longarinas**

Longarina	Momento (kN.m)	Área de aço (cm <sup>2</sup> )
V1 = V2	3312,45	93,44



**Figura 7 – Trem-tipo simplificado para duas longarinas**

#### 4.4 Resultados obtidos para o projeto da ponte com múltiplas vigas, longarina 1, (V1)

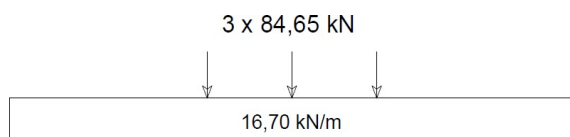
Em seguida os resultados obtidos utilizando o método de Engesser-Courbon, consistem em trem-tipo final e simplificado, figuras 8 e 9, momento fletor máximo e área de aço, quando aplicado uma carga unitária na longarina 1 (V1), definiu-se os coeficientes de repartição transversal. Esses resultados encontram-se tabelados a seguir (Tabelas 3, 4, 5 e 6).

**Tabela 3 – Valores de coeficiente de repartição transversal pelo métodos de Engesser- Courbon**

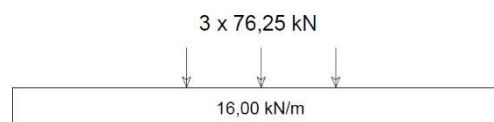
Longarina	Coeficiente de repartição transversal, rigidez real na transversina	Coeficiente de repartição transversal, infinita á rigidez na transversina
V1	0,79	0,70
V2	0,31	0,40
V3	0,02	0,10
V4	-0,12	-0,20

**Tabela 4 – Valores de trem-tipo para as diferentes rigidez analisadas, via Engesser-Courbon**

Rigidez na transversina	Longarina	RP (kN)	RP1 (kN/m)	RP2 (kN/m)	RP' (kN)	RP1 + PR2 (kN/m)
Real	V1	105,75	6,15	10,55	84,65	16,70
Infinita	V1	95,25	6,50	9,50	76,25	16,00



**Figura 8 – Trem-tipo simplificado, rigidez real da transversina**



**Figura 9 – Trem-tipo simplificado, infinita a rigidez da transversina**

**Tabela 5 – Valores de Momento fletor máximo longarina 1 (V1).**

Método	Momento fletor positivo máximo (kN.m)
Engesser-Courbon, rigidez real da transversina	2149,88
Engesser-Courbon, infinita à rigidez da transversina	1981,24

**Tabela 6 – Valores da área de aço na positivo na longarina 1 (V1).**

Método	Área de aço (cm <sup>2</sup> )
Engesser-Courbon, rigidez real da transversina	73,88
Engesser-Courbon, infinita à rigidez da transversina	65,56

#### 4.5 Resultados obtidos para o projeto da ponte com múltiplas vigas, longarina 2, (V2)

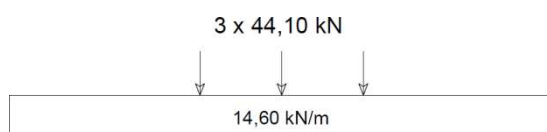
Em seguida os resultados obtidos utilizando o método de Engesser-Courbon, consistem em trem-tipo final e simplificado, figuras 10 e 11, momento fletor máximo e área de aço para a longarina 2 (V2), assim como, os coeficientes de repartição transversal. Esses resultados encontram-se tabelados a seguir (Tabelas 7, 8, 9 e 10).

**Tabela 7 – Valores de coeficiente de repartição transversal pelo métodos de Engesser- Courbon**

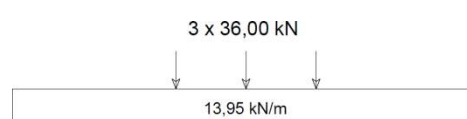
Longarina	Coeficiente de repartição transversal, rigidez real na transversina	Coeficiente de repartição transversal, infinita à rigidez na transversina
V1	0,31	0,40
V2	0,41	0,30
V3	0,26	0,20
V4	0,02	0,10

**Tabela 8 – Valores de trem-tipo para as diferentes rigidez analisadas, via Engesser-Courbon**

Rigidez na transversina	Longarina	RP (kN)	RP1 (kN/m)	RP2 (kN/m)	RP' (kN)	RP1 + PR2 (kN/m)
Real	V2	55,50	8,90	5,70	44,10	14,60
Infinita	V2	45,00	9,45	4,50	36,00	13,95



**Figura 10 – Trem-tipo simplificado, rigidez real da transversina**



**Figura 11 – Trem-tipo simplificado, infinita a rigidez da transversina**

**Tabela 9 – Valores de Momento fletor máximo positivo na longarina 2 (V2)**

Método	Momento fletor positivo máximo (kN.m)
Engesser-Courbon, rigidez real da transversina	1395,52
Engesser-Courbon, infinita à rigidez da transversina	1234,07

**Tabela 10 – Valores da área de aço positivo na longarina 2 (V2)**

Método	Área de aço (cm <sup>2</sup> )
Engesser- Courbon, rigidez real da transversina	44,40
Engesser- Courbon, infinita à rigidez da transversina	39,27

## 5 Análise comparativa dos resultados

### 5.1 Momento máximo via Método dos elementos finitos, longarina 1 (V1)

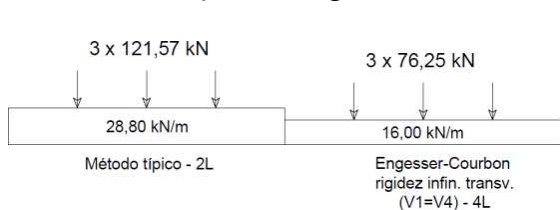
A posição da linha neutra em relação à base da seção foi de 84,424 cm, assim, por meio da análise das tensões normais de flexão, considerando a seção na fase elástica-linear, obteve-se o momento fletor máximo da longarina 1. O momento de inércia da seção foi de 12194770,80723 cm<sup>4</sup>, tendo sido obtido o momento fletor máximo de 2045,632 KN.m

### 5.2 Momento máximo via Método dos Elementos Finitos, longarina 2 (V2)

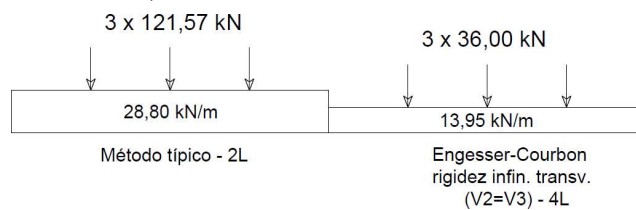
A posição da linha neutra em relação à base da seção foi de 85,622 cm, assim por meio da análise das tensões normais de flexão, considerando a seção na fase elástica-linear, obteve-se o momento fletor máximo da longarina 2. O momento de inércia da seção foi de 12525664,00131cm<sup>4</sup>, tendo sido obtido o momento fletor máximo de 13399,232KN.m

### 5.3 Análise da ponte típica-2L com a ponte de múltiplas vigas-4L, rigidez infinita na transversina

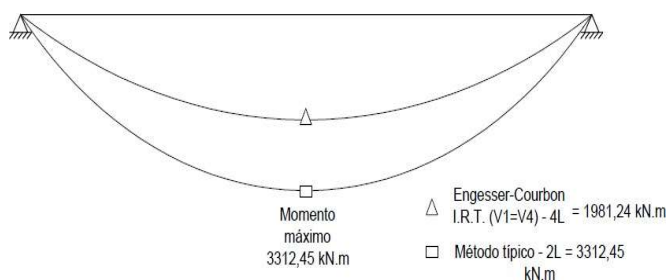
Em seguida é apresentada a comparação do trem-tipo simplificado (figuras 12 e 13), momento fletor máximo e área de aço das longarinas analisadas (figuras 14 e 15).



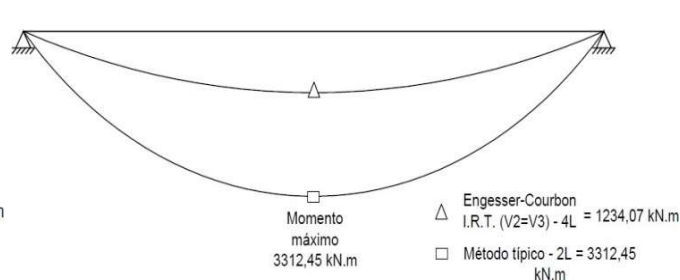
**Figura 12 – Comparativo trem-tipo de flexão, longarina 1 (V1)**



**Figura 13 – Comparativo trem-tipo de flexão, longarina 2 (V2)**



**Figura 14 – Comparativo momento fletor máximo, longarina 1 (V1)**



**Figura 15 – Comparativo momento fletor máximo longarina 2 (V2)**

Observando os valores é possível verificar que o momento fletor resultante máximo nas duas longarinas é obtido pelo método típico, para o modelo com duas longarinas. Os valores encontrados foram 67,19% superior para a longarina 1, e 168,42% superior para a longarina 2.

**Tabela 11 – Comparativo área de aço**

Método	Longarina	Área de aço (cm <sup>2</sup> )
Engesser-Courbon I.R.T.	L1	65,56
Engesser-Courbon I.R.T.	L2	39,27
Método típico-2L	L1=L2	93,44
Engesser-Courbon I.R.T.	L1+L2	104,83

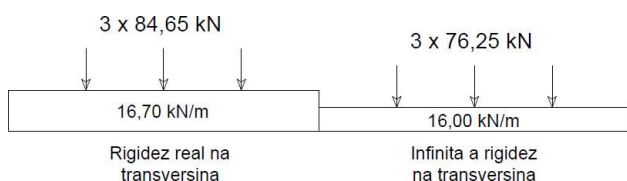
Analisando os resultados da tabela 11, verifica-se que, separadamente a área de aço da longarina 1 pelo método típico 2L, é maior que o calculado pelo método de Engesser-Courbon. Analisando a estrutura da ponte pela metade, somando a área de aço da longarina 1 com a longarina 2, via método Engesser-Courbon, a resultante das duas longarinas é superior a área de aço via método típico com duas longarinas, em um percentual de 12,19%.

#### 5.4 Análise dos resultados para o projeto de ponte com múltiplas viga

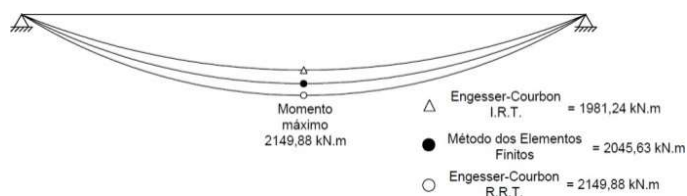
Em seguida encontra-se os resultados para o trem-tipo de flexão, máximo momento fletor e área de aço para os métodos analisados.

##### 5.4.1 Análise para a longarina 1 (V1)

Como mostrado a seguir, o trem-tipo simplificado calculado pelo método Engesser-Courbon com a rigidez real na transversina apresentou os maiores valores de ações (Figura 16).



**Figura 16 - Trens-tipo para a longarina 1 (V1), via Engesser-Courbon**



**Figura 17 - Momento positivo máximo para a longarina 1 (V1)**

Analisando os valores resultantes, é possível verificar que o momento fletor máximo foi obtido quando considerou-se a rigidez real na transversina, via método Engesser-Courbon, conforme figura 17. Para fins de comparação tomou-se como referência o Método dos elementos Finitos, onde o método de MEF possui um



momento 3,25% superior ao Engesser Courbon com I.R.T e o método com R.R.T 5,09% de superioridade ao MEF. Já comparando as diferenças do método de Engesser Courbon, o método com R.R.T possui um momento superior de 8,51% ao método com I.R.T.

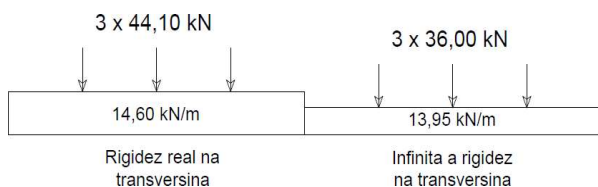
**Tabela 12 – Comparativo área de aço longarina 1 (V1)**

Método	Área de aço (cm <sup>2</sup> )
Engesser-Courbon I.R.T.	65,56
Método dos Elementos Finitos	70,29
Engesser-Courbon R.R.T.	73,88

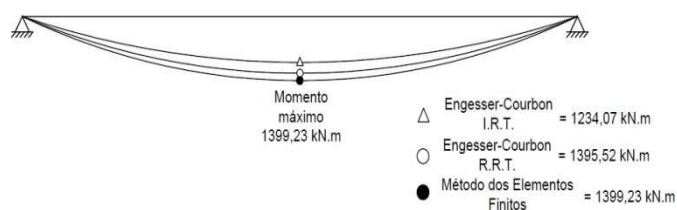
Observa-se na tabela 12, verifica-se que o método Engesser-Courbon com a rigidez real na transversina apresenta uma área de aço 5,11% superior ao método dos Elementos finitos, e o MEF uma área de aço 7,21% superior ao Engesser-Courbon com a infinita rigidez na transversina. Comparando as diferenças entre o método de Engesser Courbon, o método com R.R.T. contém uma área de aço 12,69% superior ao método com I.R.T.

#### 5.4.1 Análise para a longarina 2 (V2)

Como mostrado a seguir, o trem-tipo simplificado calculado pelo método Engesser- Courbon com a rigidez real na transversina, demonstrou os maiores valores para a carga da roda e para a carga distribuída de multidão, conforme Figura 18.



**Figura 18 - Trens-tipo para a longarina 2 (V2), via Engesser-Courbon**



**Figura 19 - Momento positivo máximo para a longarina 2 (V2)**

Analisando os valores resultantes, verifica-se que o momento fletor máximo foi obtido quando empregado o MEF, como mostrado na figura 19. Para fins de comparação tomou-se como referência o Método dos elementos Finitos, onde oMEF possui um momento 13,38% superior ao Engesser Courbon com I.R.T.. O MEF um momento de 0,27% superior ao Engesser Courbon com R.R.T.. Já comparando as diferenças entre o método do Engesser Courbon, o método com R.R.T possui um momento superior de 13,08% ao método com I.R.T.

**Tabela 13 – Comparativo área de aço longarina 2 (V2).**

Método	Área de aço (cm <sup>2</sup> )
Engesser-Courbon I.R.T.	39,27
Engesser-Courbon R.R.T.	44,40
Método dos Elementos Finitos	44,50

Observa-se por meio da tabela 13, que o método dos Elementos Finitos apresenta uma área de aço 0,22% superior ao método Engesser-Courbon com a rigidez real na transversina, e o MEF uma área de aço 13,32% superior ao método de Engesser-Courbon com a infinita rigidez na transversina. Comparando as diferenças entre o método de Engesser Courbon, o método com R.R.T. contém uma área de aço 13,06% superior ao método com I.R.T.

## 6 Conclusão

Para os resultados comparativos da ponte projetada com duas longarinas pelo método típico e a ponte projetada com múltiplas longarinas via modelo de Engesser-Courbon com infinita rigidez na transversina, o trem-tipo de flexão, obteve valores superiores ao da ponte com duas longarinas calculada pelo método típico, chegando a valores até 168,42% superiores para a longarina 2. Porém, ao analisar a área de aço utilizada pela metade da ponte, o projeto com múltiplas vigas apresentou uma área de aço 12,19% maior, resultando em um dimensionamento mais conservador.

Ao comparar a ponte com múltiplas vigas via, método Engesser-Courbon com infinita rigidez na transversina, Engesser-Courbon com rigidez real na transversina e método dos Elementos Finitos, em relação aos resultados finais do máximo momento fletor e área de aço, para a longarinas 1 (V1), os resultados mostraram-se superiores para o método de Engesser-Courbon com rigidez real na transversina, e para a longarina 2 (V2), os resultados mostraram-se superior para o método dos Elementos Finitos. Pode-se concluir que o método de Engesser-Courbon, com a rigidez da transversina considerada infinita, apresentou valores inferiores quando comparados com os outros métodos analisados, portanto, consequentemente mais econômico.

No presente estudo, na longarina 1 em análise, apresentou resultados inferiores no máximo momento fletor e área de aço, comparado com o método de Engesser-Courbon com R.R.T., mas analisando a longarina 2, o MEF apresentou resultados de momento fletor e área de aço, superiores aos obtidos pelo método de Engesser-Courbon com R.R.T.

## Referências

- ALVES, E. V.; ALMEIDA, S. M. F.; JUDICE, F. M. S. Métodos de análise estrutural de tabuleiros de pontes em vigas múltiplas de concreto protendido. Entrevista, Niterói, v. 6, n. 2, p. 48-58, ago. 2004.
- ASSAN, A. E., Método dos Elementos Finitos: Primeiros passos. 1. ed. Campinas, São Paulo, Unicamp, 1999.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7188: projeto de pontes de concreto armado e concreto protendido: procedimento. Rio de Janeiro, 2013.
- \_\_\_\_\_. NBR 6118: projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- CARRIL, R. S.; LOPES, V. M. F., Métodos aproximados de determinação da distribuição de esforços na secção transversal de pontes rodoviárias. Comparação com métodos mais exatos, (19--?).